ELECTROMAGNETISMO, ANÁLISIS ARMÓNICO Y EL GRUPO CONFORME

Adolfo Sánchez Valenzuela
Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, CP36000; Guanajuato, Gto. México
E-mail: adolfo@fractal.cimat.mx

Curso impartido durante las
II Jornadas de Análisis Matemático y Numérico
Centro de Investigaciones Matemáticas
Guanajuato, 1-4 de junio de 1987.

Prólogo. El objetivo de este curso es el de presentar algunos aspectos de la teoría electromagnética en el vacío desde el punto de vista de la geometría diferencial y de la teoría de grupos de Lie. Específicamente, se pretende motivar el estudio de los métodos matemáticos que aquí exponemos bajo el pretexto de tomar seriamente el hecho de que la teoría electromagnética es invariante conforme.

El curso está dividido en dos capítulos. El primero tiene básicamente por objetivo plantear las ecuaciones de Maxwell en un contexto adecuado a su invariancia conforme. La temática va desde observar ciertas peculiaridades de la teoría especial de la relatividad en conjunción con el electromagnetismo, hasta describir cómo se completa de manera conformemente plana el espacio-tiempo. El segundo capítulo ilustra cómo emplear técnicas de análisis armónico en grupos de Lie compactos para la determinación de ciertas soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Cabe señalar que por cuestiones de claridad en la exposición, desistimos, desde un principio, de probar las afirmaciones de carácter técnico que a lo largo del texto se hacen. El lector interesado en los detalles puede consultar los trabajos referidos en la bibliografía.

La presentación de este material responde al sentir como deber, el difundir—con el reconocimiento que se merece—el trabajo de mis maestros, B. Kostant y S. Sternberg. A ellos expreso mi agradecimiento por introducirme a tan fascinante tema. Deseo también agradecer, a los organizadores de las II Jornadas de Análisis, la oportunidad que la ocasión me ha dado de escribir estas notas. Además, quiero agradecer a quienes asistieron al curso por sus comentarios que, espero, hayan quedado reflejados en la versión final del manuscrito. Por último, no me queda sino agradecer la hospitalidad de la que fuimos objeto durante nuestra estancia en el CIMAT.

Ciudad Universitaria; junio de 1987.

O.A.S.V.

Reproducción de: Comunicaciones Técnicas IIMAS-UNAM, Serie Verde, Número 32, (1987)

OTRO PROLOGO PARA EXPLICAR

Lo había pensado una gran cantidad de veces y cada vez que lo hacía me daba algún (¿buen?) argumento de por qué *no debería hacerlo*,... ¿Hacer qué? Esto: publicar "fuera de volumen" las viejas notas que escribí para aquél mini curso sobre geometría y electromagnetismo que dicté en el CIMAT hace más de diez años; cuando yo aún no tenía ni la más remota idea de que pronto me convertiría en un *cimateca.* Debo decir que en cada Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, en cada Escuela o Taller de Geometría o de Física Matemática donde pensaba que pudiera tener cabida la publicación de mis notas, se me *movía el tapete*,... Pero siempre pensé que se veía muy mal esto de publicar "fuera de volumen". Sin embargo, también recuerdo que esas notas las escribí con mucha emoción, con mucha ilusión y con una calidad de tiempo dedicada a su elaboración de la que ahora muy difícilmente puedo disponer. Yo tenía muy poco tiempo de haber regresado a México en calidad de 'recién doctorado'. Y en esos tiempos, en los que uno no conoce de Comisiones Evaluadoras, ni de Comités Organizadores, ni se tiene tan a flor de piel la neurosis de sobrevivir dentro de los Sistemas Nacionales, en esos tiempos en los que uno está auténticamente preocupado por revertir en México lo que se ha aprendido afuera y por dar y hacer las cosas lo mejor posible en aras de los viejos ideales preparatorianos, en esos tiempos del *welcome back to Mexico* los llamados 'recién doctorados' esperan sencillamente que el aparato científico del país les responda también con una palmada de ánimo en el hombro: *nice job kid! Keep it up!* Y cuando por alguna fatalidad esa palmada no puede llegar a tiempo, o no había las condiciones para darle *volumen* a ese primer trabajo, se comienzan a guardar los esfuerzos en el cajón y a disminuir las energías y las ilusiones: "para el próximo Congreso o Taller no puedo darme el lujo de invertir tánto así". Y ahora, más de diez años después, aprovechando la publicación del volumen de las notas de los cursos del IV Taller de Verano en Sistemas Dinámicos del CIMAT y abusando (¿un poco?) de la buena fé y buena voluntad de los editores, me he aventurado a considerar algunas razones por las que estas notas podrían ya no quedarse en el cajón para siempre. Creo que si han de tener una 'casa', élla ha de ser ésta. No aburriré al lector con los múltiples desvaríos que hoy me dí para 'sacar las notas del closet', pero sí quiero agradecerle muy profundamente a mi querida colega Begoña Fernández la elocuentísima energía y el gran empeño que puso en sus argumentos para que yo haga a un lado mi política derrotista y negativa respecto a los trabajos guardados; quizás, la mejor forma de probar que efectivamente escuché con seriedad *opiniones distintas* a las mias es precisamente sometiendo este trabajo a la consideración del Comité Editorial y tratar de publicarlo porque con ello estaré intentando transmitir — como me ha dicho: con probabilidad distinta de cero — un mensaje positivo y valioso a los jóvenes recién doctorados: su esfuerzo sí vale la pena y la comunidad sí lo aprecia. Agradezco sinceramente a los Editores la oportunidad de 'probar este caso'.

ASV
Guanajuato, Gto., Marzo de 1998.

I. Electromagnetismo y el Grupo Conforme

I.1 Sobre la Teoría Especial de la Relatividad. La teoría especial de la relatividad sugiere considerar como grupo de invariancia de las leyes de la física al grupo $O(3,1)$ ó por lo menos a alguna cobertura finita de alguna(s) de sus componentes conexas. En efecto, fué Einstein quien puso de manifiesto que las leyes de la física debían ser invariantes ante transformaciones de un espacio tetradimensional—llamado espacio-tiempo de Minkowski y denotado por T—que respetaran, no la descomposición directa,

$$T = (\text{Espacio}) \oplus (\text{Tiempo}), \tag{1}$$

sino una forma bilineal, simétrica, no degenerada, de signatura $(3,1)$,

$$B_T \colon T \times T \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Cabe recordar que lo que dió origen a la teoría de Einstein fué el hecho de que las ecuaciones del electromagnetismo desarrolladas por Maxwell admitían por simetrías a las transformaciones del grupo de Lorentz, $O(3,1)$; ésto es, las ecuaciones mantenían la misma forma después de efectuar una tal transformación. Antes del advenimiento de la relatividad especial, la interpretación de las transformaciones de Lorentz se hacía a la luz de la mecánica newtoniana y—aunque en las ecuaciones de transformación la variable temporal t cambiaba en forma completamente análoga a como lo hacían las variables espaciales x, y, z—se continuó pensando que la descomposición (1) poseía un carácter de *a priori;* para decirlo en el lenguaje de la teoría de grupos, a las transformaciones que dejaban invariantes las ecuaciones del electromagnetismo se las interpretó únicamente dentro del contexto de la descomposición $O(3) \times O(1) \subset O(3,1)$.

Una forma (¡sobresimplificada!) de parafrasear las contribuciones de Einstein y Poincaré es que lo que nos es dado *a priori* es, en todo caso, el espacio tetradimensional T y su métrica B_T de signatura $(3,1)$. La descomposición de T en espacio y tiempo corresponde simplemente a una descomposición directa en términos de dos subespacios—digamos, $T = Z \oplus \zeta$—con la propiedad de que la restricción de B_T al subespacio Z sea positiva definida y que la restricción de B_T a ζ sea negativa definida. Sin embargo, tal descomposición no puede ser físicamente relevante, en el sentido de que hay transformaciones que no alteran las ecuaciones de la teoría electromagnética y que sin embargo sí alteran la descomposición $T = Z \oplus \zeta$. Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fué construida. Al parecer, cuando se volvió a plantear el problema de buscar transformaciones para las que las leyes de la física permanecieran invariantes, se estaba aceptando que la forma de las ecuaciones de Maxwell debía ser la misma para todos los observadores inerciales.

I.2 Sobre las Ecuaciones de la Teoría Electromagnética. Nuestro primer objetivo consiste en proporcionar un panorama geométrico de la teoría electromagnética hasta el punto de escribir las ecuaciones de Maxwell en una forma independiente de coordenadas y que además, muestra gran semejanza con las ecuaciones de Cauchy-Riemann (ver §**I.4** y §**I.9**). Empezaremos aquí por reconocer que siempre se han podido apreciar nuevas facetas del electromagnetismo como consecuencia de poder escribir sus ecuaciones en distintas formas. Una primera muestra de ello lo es la introducción de la notación vectorial tridimensional. Por ejemplo, en ausencia de cargas y corrientes, se tiene,

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}&=0, & \nabla\cdot\mathbf{B}&=0,\\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\partial_t\mathbf{B}, & \nabla\times\mathbf{B}&=\partial_t\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{3}$$

Cálculos formales permiten rapidamente escribir los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en términos de potenciales $\mathbf{A}$ y A_4 como,

$$\mathbf{E}=\nabla A_4-\partial_t\,\mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{4}$$

y resulta entonces muy sencillo demostrar que dichos potenciales satisfacen la ecuación de onda. También es fácil probar la invariancia de norma; ésto es, ver que los campos no se alteran al realizar la transformación,

$$\mathbf{A}\mapsto\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}+\nabla\varphi \qquad \text{y} \qquad A_4\mapsto\widetilde{A}_4=A_4+\partial_t\,\varphi, \tag{5}$$

siendo φ una función arbitraria.

Con el surgimiento de la relatividad especial, los campos eléctrico y magnético se vieron fuertemente ligados entre sí al escribir las ecuaciones de Maxwell en términos de un tensor antisímetrico doblemente covariante en los cuatro índices del espacio-tiempo,

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu\,A_\nu-\partial_\nu\,A_\mu, \tag{6}$$

donde hemos puesto $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Tal objeto asocia a cada punto de T, seis componentes llamadas *las componentes del campo electromagnético*. Identificando las cantidades $\mathbf{A}=(A_1,A_2,A_3)$ y A_4 con los potenciales introducidos anteriormente, se observa que las seis cantidades $F_{\mu\nu}$ corresponden simplemente a las tres componentes del campo eléctrico junto con las tres componentes del campo magnético.

La introducción del tensor $F_{\mu\nu}$ resulta fundamental para poner de manifiesto que la descomposición del campo electromagnético en la forma $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ no es físicamente invariante puesto que existen transformaciones que mezclan las componentes eléctricas y magnéticas y que sin embargo, no alteran la forma de las ecuaciones de Maxwell— que en este lenguaje se escriben así:

$$\partial_\lambda\,F_{\mu\nu}+\partial_\mu\,F_{\nu\lambda}+\partial_\nu\,F_{\lambda\mu}=0, \qquad \text{y} \qquad \partial^\nu\,F_{\mu\nu}=0. \tag{7}$$

Un enfoque mas geométrico resulta de notar que las cantidades $\{F_{\mu\nu}\}$ definen en realidad una 2-forma diferencial en el espacio-tiempo; a saber,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{8}$$

En otras palabras, es posible pensar el tensor electromagnético como una función que asigna, a cada punto de T, un elemento del subespacio vectorial $\wedge^2 T$ del algebra exterior $\wedge T$ asociada a T. Este será el enfoque que aquí adoptaremos.

I.3 Sobre las Estructuras Geométricas Inducidas en el Algebra Exterior. Recordemos que toda vez que nos sea dado un espacio vectorial, como por ejemplo T, el álgebra exterior $\wedge T$ de T se obtiene prácticamente sin costo adicional, en el sentido de que ésta requiere condiciones mínimas para poder existir a partir de T; a saber, estar generada por T mismo, por un elemento idéntico $1 \in T$ y satisfacer el conjunto de relaciones,

$$x \wedge x = 0, \qquad \text{for all } x \in T. \tag{9}$$

Una consecuencia muy importante de éstas relaciones es que el álgebra $\wedge T$ posee dimensión finita. De hecho, se tiene una descomposición directa de la forma,

$$\wedge T = \wedge^0 T \oplus \wedge^1 T \oplus \wedge^2 T \oplus \wedge^3 T \oplus \wedge^4 T, \tag{10}$$

donde $\wedge^k T$ es el subespacio de dimensión k generado por los llamados *elementos descomponibles*[1] de orden k; éstos son, aquellos que pueden escribirse en la forma $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$, con $x_i \in T$ linealmente independientes. Convenimos, por supuesto, en que $\wedge^0 T$ consiste en los múltiplos reales del elemento idéntico $1_{\wedge T}$ y en identificar al subespacio $\wedge^1 T$ con T.

La construcción de $\wedge T$ es un recurso natural que permite, entre otras cosas, tratar algebraicamente cuestiones relacionadas con los subespacios vectoriales de T. Por ejemplo, existe una correspondencia biyectiva [8],

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios unidimensionales de} \\ \wedge T \text{ generados por los elementos} \\ \text{descomponibles } u \in \wedge^k T \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios} \\ \text{de } T \\ \text{de dimensión } k \end{array} \right\}, \tag{11}$$

en que el subespacio U de T generado por los k vectores linealmente independientes $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k$, se hace corresponder con el subespacio de $\wedge^k T$ generado por $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$. En estas condiciones, se puede demostrar que $x \in U \Leftrightarrow u \wedge x = 0$. Si $y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_k$, es otra base de U y se escribe $x_j = \sum a_{ij}\, y_i$, siendo $a = (a_{ij})$ una matriz invertible, resulta que

$$u = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = \det(a)\, y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_k. \tag{12}$$

[1] *Descomponible.* Susceptible de descomposición. Alonso, Martín. Enciclopedia del Idioma Vol. II. Editorial Aguilar

En particular, es fácil convencerse de que la elección de una base para el subespacio unidimensional $\wedge^4 T$ equivale a proporcionar una orientación específica para T.

Ahora bién, la naturalidad de $\wedge T$—*naturalidad* en un sentido que puede precisarse técnicamente—permite llevar conceptos geométricos de T a $\wedge T$. Por ejemplo, la métrica B_T originalmente definida en T, induce una métrica en $\wedge T$—también denotada por B_T—definida en los generadores como

$$(13) \qquad B_T(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_j,\, y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ \det\big(B_T(x_r, y_s)\big), & \text{si } j = k \end{cases}$$

y extendida por bilinealidad a todo $\wedge T$. Esta métrica inducida es tal que la descomposición (10) es ortogonal y la restricción a

$$(14) \qquad \begin{array}{lll} \wedge^0 T & \text{tiene signatura} & (1,0), \\ \wedge^1 T & \text{tiene signatura} & (3,1), \\ \wedge^2 T & \text{tiene signatura} & (3,3), \\ \wedge^3 T & \text{tiene signatura} & (1,3), \\ \wedge^4 T & \text{tiene signatura} & (0,1). \end{array}$$

Un aspecto muy interesante del subespacio $M = \wedge^2 T$ (letra "M" de Maxwell) es que la métrica inducida por restricción de B_T a M posee mas libertad de la que la métrica original de T permite; de hecho, no se necesita métrica alguna en T para definir una métrica de signatura $(3,3)$ en M. Todo lo que se necesita es una orientación del espacio-tiempo T—ésto es, elegir $0 \neq \gamma \in \wedge^4 T$—para que se defina, via multiplicación, una forma bilineal, simétrica, no degenerada, $B\colon M \times M \to \mathbb{R}$, que resulta tener dicha signatura; a saber,

$$(15) \qquad B(u,v)\gamma = u \wedge v, \qquad \text{para todos } u, v \in M.$$

Pero dos formas bilineales en el mismo espacio y con la misma signatura deben claramente estar relacionadas entre si. Tal es el caso con B y $B_T|_M$. Para describir la relación entre ambas solo se necesita el operador de Hodge en $\wedge T$: la métrica en $\wedge T$ y la elección de una orientación en T—digamos $\gamma \in \wedge^4 T$, tal que $B_T(\gamma, \gamma) = -1$—permiten definir el operador

$$(16) \qquad \wedge^k T \ni u \mapsto *u \in \wedge^{4-k} T$$

mediante la fórmula,

$$(17) \qquad B_T(*u, v) = -B_T(\gamma, u \wedge v), \qquad \text{para todo } v \in \wedge^{4-k} T.$$

Ahora bién, el operador de Hodge define, por restricción a M, una estructura compleja; ésto es, un endomorfismo de M cuyo cuadrado es menos la transformación idéntica. Llamémosle J a dicha restricción. Lo que resulta entonces es que

$$(18) \qquad B_T(Ju, v) = B(u, v), \qquad \text{para todos } u, v \in M,$$

cosa que se puede verificar diréctamente de las definiciones (15) y (17). Igualmente directo es el hecho de que J es un operador autoadjunto, tanto para B como para $B_T|_M$. En particular, dado que $J^2 = -id_M$, J resulta ser una anti-isometría; esto es, que para todo $u \in M$,

$$B_T(Ju, Ju) = -B_T(u, u), \qquad \text{y} \qquad B(Ju, Ju) = B(u, u). \tag{19}$$

Una consecuencia muy importante de (18) y (19) es que el subespacio bidimensional $\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju \subset M$ es isotrópico para B, si y solo si, lo es también para $B_T|_M$, en cuyo caso, basta con que $B(u, u) = 0 = B_T(u, u)$. Señalemos, finalmente, que J deja invariante al subespacio $\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju \subset M$ y que todo subespacio isotrópico bidimensional y J-invariante es de esta forma.

I.4 Sobre la Descripción de la Luz y la Definición de las Componentes Eléctricas y Magnéticas. La importancia de los subespacios isotrópicos bidimensionales de M que son estables bajo J radica en el hecho de que cada uno de ellos define de manera única—y, como veremos mas adelante, de manera conformemente invariante—un subespacio isotrópico de T (forzosamente de dimensión uno); ésto es, un rayo de luz. La aseveración precisa es la siguiente: dado $\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju \subset M$ isotrópico, existe un único $N \subset T$ isotrópico, tal que [4],

$$\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju = N \wedge N^{\perp}. \tag{20}$$

Además, con cada descomposición ortogonal de T en espacio y tiempo—digamos, $T = Z \oplus \zeta$ como en (I.1)—y eligiendo una escala temporal—digamos, un elemento $\gamma_\zeta \in \wedge^1 \zeta \simeq \zeta$, tal que $B_T(\gamma_\zeta, \gamma_\zeta) = -1$—es posible asociar, a cada elemento $u \in M$, dos vectores en el espacio (entendiendo "espacio" como el sumando directo tridimensional) que no son otra cosa mas que sus componentes eléctrica y magnética. De hecho, si $\iota(\gamma_\zeta)$ es la transformación lineal $\wedge T \to \wedge T$ definida mediante la ecuación

$$B_T(\iota(\gamma_\zeta)v, w) = B_T(v, \gamma_\zeta \wedge w), \tag{21}$$

se puede demostrar que su restricción a M define una suprayección

$$\iota(\gamma_\zeta)|_M \colon M \to Z, \tag{22}$$

cuyo kernel es $\wedge^2 Z$. Además, tiene la propiedad de que la restricción

$$\iota(\gamma_\zeta)|_{T \wedge \zeta} \colon T \wedge \zeta \to Z, \tag{23}$$

es una anti-isometría y, en virtud de la primera ecuación en (19),

$$\big(\iota(\gamma_\zeta)|_{T \wedge \zeta}\big) \circ \big(J|_{\wedge^2 Z}\big) \colon \wedge^2 Z \to Z, \tag{24}$$

es una isometría. Estas consideraciones permiten entonces definir, para cualquier $u \in M$, sus componentes eléctrica y magnética (relativas a la descomposición $T = Z \oplus \zeta$ y a las elecciones $\gamma \in \wedge^4 T$ y $\gamma_\zeta \in \wedge^1 \zeta$), como

$$u_E = \iota(\gamma_\zeta)\, u \qquad \text{y} \qquad u_B = -\iota(\gamma_\zeta)\, Ju, \tag{25}$$

respectivamente. En el caso de elementos isotrópicos $u \in M$, estos dos vectores tridimensionales son perpendiculares entre si y poseen igual magnitud. Por otra parte, la componente espacial del subespacio isotrópico $N \subset T$ determinado por el subespacio isotrópico $\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju \subset M$ resulta ser a su vez perpendicular a ambos; se trata sencillamente del vector de Poynting.

La demostración general de éstas afirmaciones puede consultarse en [4], aunque el lector puede, con las definiciones que aquí se han dado, demostrarlas con la ayuda de un sistema de coordenadas ortonormal. En particular, recomendamos el siguiente,

Ejercicio. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de T. Elíjanse, orientaciones

$$\gamma = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \qquad \text{y} \qquad \gamma_\zeta = e_4,$$

y escríbase cualquier $u \in \wedge^2 T = M$ en la forma

$$(*) \qquad \begin{aligned} u = {} & B_1\, e_2 \wedge e_3 + B_2\, e_3 \wedge e_1 + B_3\, e_1 \wedge e_2 \\ & + E_1\, e_1 \wedge e_4 + E_2\, e_2 \wedge e_4 + E_3\, e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

Demostrar que, bajo la descomposición $T = Z \oplus \zeta$, con Z igual al subespacio generado por $\{e_1, e_2, e_3\}$ y ζ igual al subespacio generado por $\{e_4\}$, se tiene

$$(**) \qquad \begin{aligned} Ju = {} & E_1\, e_2 \wedge e_3 + E_2\, e_3 \wedge e_1 + E_3\, e_1 \wedge e_2 \\ & - B_1\, e_1 \wedge e_4 - B_2\, e_2 \wedge e_4 - B_3\, e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

$$u_E = E_1\, e_1 + E_2\, e_2 + E_3\, e_3, \qquad \text{y} \qquad u_B = B_1\, e_1 + B_2\, e_2 + B_3\, e_3,$$

$$\begin{aligned} B_T(u_e, u_B) &= \frac{1}{2}\, B(u,u) \\ &= u_E \cdot u_B = E_1 B_1 + E_2 B_2 + E_3 B_3 \\ B_T(u,u) &= ||u_B||^2 - ||u_E||^2 \\ &= {B_1}^2 + {B_2}^2 + {B_3}^2 - ({E_1}^2 + {E_2}^2 + {E_3}^2). \end{aligned}$$

Substituir formalmente dx^μ por e_μ ($\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) en (*) y en (**) y demostrar, tomando la derivada exterior, que las ecuaciones (3) son las mismas que

$$du = 0 \qquad \text{y} \qquad dJu = 0.$$

Trabajar, de manera similar, el caso en el que $\dim T = 2$ y la signatura es $(2,0)$ para convencerse de que estas ecuaciones no son otra cosa que las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

I.5 Sobre la Invariancia Conforme de la Teoría Electromagnética. Un punto muy importante que queremos señalar es que ni la estructura compleja J, ni la relación (18), se alteran al permitir transformaciones que van mas allá de aquellas inducidas por los elementos del grupo ortogonal $O(3,1)$. Por ejemplo, las transformaciones en M procedentes de transformaciones en T que respetan la métrica B_T de T hasta un factor real positivo, las preservan. De esta manera, al estudiar electromagnetismo—esto es, al estudiar M—uno se ve conducido de manera natural a considerar el grupo de transformaciones conformes de T respecto a la métrica B_T. (Este hecho fué descubierto desde principios de siglo [1]: el grupo de invariancia de las ecuaciones de Maxwell no es el grupo de Poincaré, sino el grupo de transformaciones conformes del espacio-tiempo de Minkowski).

Se sabe, por ejemplo, que el álgebra de Lie del grupo de transformaciones conformes respecto a una métrica ortogonal de signatura (p,q) es isomorfa al álgebra de Lie del grupo $O(p+1,q+1)$ [6]. En particular, el electromagnetismo conduce al estudio de alguna cobertura finita de alguna(s) de las componentes conexa(s) del grupo $O(4,2)$. Esto conduce, a su vez, al estudio del grupo $Pin(4,2)$ construido con la ayuda del álgebra de Clifford.

I.6 Sobre la Realización de una Cobertura Conforme vía el Algebra de Clifford. Recordemos que, toda vez que nos sea dada una métrica ortogonal en T, obtenemos, sin costo adicional—y queriéndolo ó no—un álgebra asociada de forma natural al par (T, B_T): su algebra de Clifford, $C(T, B_T)$. Esto es completamente análogo a lo que sucede al derivar el álgebra exterior a partir del espacio vectorial sin métrica, T. Esta vez el álgebra estará generada por un elemento idéntico, 1_C, y los elementos de T sujetos a la relación

$$xy + yx = 2B_T(x,y)1_C, \qquad \text{para todos } x, y \in T. \tag{26}$$

Recordemos también que el álgebra de Clifford es un recurso que, entre otras cosas, permite construir ciertas representaciones del grupo ortogonal—llamadas *espinoriales* por E. Cartan—que, por otra parte, no son realizables en términos de subespacios invariantes del álgebra exterior bajo la acción inducida por la construcción del functor $\wedge$ (véase [2]).

En el caso que nos interesa estudiar, el álgebra de Clifford da lugar al grupo de Lie $Pin(4,2)$ que es un doble cubriente del grupo ortogonal $O(4,2)$. Se obtiene a partir del subgrupo de elementos invertibles y normalizados en el álgebra de Clifford que, bajo "cuasiconjugación", tienen la propiedad de mantener el subespacio $T \subset C(T, B_T)$ estable [5]. Cabe mencionar como un hecho importante que es posible realizar el grupo $Pin(4,2)$ como el conjunto de todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales L del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^4$ que satisfacen, para todo $v \in \mathbb{C}^4$,

$$L(iv) = \pm i L(v), \qquad \text{y} \qquad H(Lv, Lv) = \pm H(v,v), \tag{27}$$

donde las cuatro combinaciones de los signos son posibles y H es una forma hermitiana en $\mathbb{C}^4$ de signatura $(2,2)$. Las cuatro posibilidades se etiquetan entonces como isometrías ó anti-isometrías que a su vez pueden ser lineales ó antilineales. Por otra parte, las componentes conexas del grupo conforme del par (T, B_T)—al igual que las del grupo de Lorentz—pueden describirse de acuerdo a su efecto de conservar ó invertir la orientación del espacio y que a su vez pueden conservar ó invertir la orientación del tiempo. En [5], hemos demostrado que,

(1) las isometrías lineales en $Pin(4, 2)$ cubren a las transformaciones de T que conservan las orientaciones del espacio y del tiempo.
(2) las anti-isometrías lineales cubren a las transformaciones de T que invierten tanto la orientación del espacio como la del tiempo.
(3) las isometrías antilineales cubren a las transformaciones de T que sólo invierten la orientación del tiempo.
(4) las anti-isometrías antilineales cubren a las transformaciones de T que sólo invierten la orientación del espacio.

Además, la componente conexa del elemento idéntico en $Pin(4, 2)$ resulta ser precisamente el grupo $SU(2, 2)$; en otras palabras, todos los elementos en dicha componente tienen determinante igual a la unidad.

I.7 Sobre la Complejificación del Espacio-Tiempo. Resumiendo un poco, al estudiar electromagnetismo uno se enfrenta con los siguientes hechos: (i) existen dos formas bilineales simétricas de signatura $(3, 3)$ definidas de manera natural en el espacio $M = \wedge^2 T$ donde el campo electromagnético toma sus valores y la relación entre ellas no depende de la clase conforme de la métrica del espacio-tiempo; (ii) la relación entre dichas formas bilineales está dada en términos de una estructura compleja—definida en el mismo espacio—que es invariante conforme; (iii) existe una realización en el espacio $End_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^4$ de un cubriente del grupo de transformaciones conformes del espacio-tiempo cuyos elementos en la componente idéntica pertenecen al grupo $SU(2, 2)$.

En estas condiciones, el análisis mismo sugiere: (i) pensar en $\mathbb{C}^4$ como la complejificación, $T_{\mathbb{C}}$, del espacio-tiempo T del que partimos, (ii) imponer una estructura hermitiana de signatura $(2, 2)$ en $T_{\mathbb{C}}$—que denotaremos por H—y (iii) rehacer el análisis original substituyendo T po $T_{\mathbb{C}}$ y B_T por H. En particular, el álgebra exterior $\wedge T_{\mathbb{C}}$ adopta una métrica hermitiana cuya restricción al subespacio $M_{\mathbb{C}} = \wedge^2 T_{\mathbb{C}}$ posee signatura $(2, 4)$. El operador de Hodge, definido en términos de la métrica hermitiana como,

$$H(*u, v) = H(\gamma, u \wedge v), \qquad \text{con } \gamma \in \wedge^4 T_{\mathbb{C}} \text{ tal que } H(\gamma, \gamma) = 1, \tag{28}$$

da por resultado un operador antilineal $\theta \colon M_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}}$ cuyo cuadrado es la identidad; en otras palabras, una conjugación compleja. Ésta puede usarse para definir un subespacio real $V^{2,4} \subset M_{\mathbb{C}}$ de dimensión seis mediante la condición,

$$V^{2,4} = \{u \in M_{\mathbb{C}} \mid \theta(u) = u\}. \tag{29}$$

Además, la restricción de H a $V^{2,4}$ produce una forma bilineal simétrica de signatura $(2,4)$. Todo esto nos regresa al estudio del grupo $O(4,2) \simeq O(2,4)$. Cabe mencionar que uno también se ve conducido al estudio del subespacio complejificado $M_{\mathbb{C}} \simeq (\wedge^2 T)_{\mathbb{C}}$ al momento de plantearse el problema de encontrar una descomposición en términos de los eigenespacios de la transformación lineal J. En efecto, dado que los eigenvalores de J son $\pm i \in \mathbb{C}$, tal descomposición sólo puede tener sentido al permitir una extensión del campo escalar original; ésto es, sólo puede hacerse en $M_{\mathbb{C}}$, en cuyo caso,

$$M_{\mathbb{C}} = M_+ \oplus M_- \simeq \{u - iJu \mid u \in \wedge^2 T\} \oplus \{u + iJu \mid u \in \wedge^2 T\}. \tag{30}$$

De cualquier manera, resulta muy natural tratar de explotar las posibilidades que la complejificación de T y la consecuente introducción del grupo $SU(2,2)$ ofrecen. Por ejemplo, entre otras cosas, se obtiene una caracterización muy interesante de los subespacios isotrópicos de M invariantes bajo J: a saber, $\mathbb{R}u + \mathbb{R}Ju \subset M$ es isotrópico si y sólo si $u - iJu$ es descomponible en M_+, lo cual sucede si y sólo si el correspondiente subespacio bidimensional de $T_{\mathbb{C}}$ es isotrópico.

I.8 Sobre un Modelo Conforme del Espacio-Tiempo. Otra consecuencia muy importante de trabajar con $M_{\mathbb{C}}$ es que resulta mas ó menos sencillo darse cuenta de que la completación conforme del espacio-tiempo T está incluida dentro de una variedad compleja y compacta de manera completamente análoga a como el círculo S^1 está incluido como el ecuador de la variedad compleja S^2. Elucidar este punto es precísamente el tema de esta sección.

Ya hemos mencionado que, en general, para espacios vectoriales reales de dimensión estrictamente mayor que dos, el álgebra de Lie del grupo de transformaciones conformes para una métrica de signatura (p,q) es isomorfa al álgebra de Lie del grupo ortogonal de una métrica de signatura $(p+1,q+1)$. Ahora bién, dada una métrica de signatura $(p+1,q+1)$, siempre es posible encontrar un subespacio—digamos, $V^{p,q} \subset V^{p+1,q+1}$—donde la restricción posea signatura (p,q). Sin embargo, no es cierto que al exponenciar los elementos del álgebra de Lie de las transformaciones conformes de $V^{p,q}$ se puedan obtener transformaciones globalmente definidas en $V^{p,q}$. Por esta razón, uno se ve conducido a considerar un nuevo espacio, $X^{p,q}$, con las propiedades siguientes:

(i) $X^{p,q}$ es homogeneo para la acción del grupo $O(p+1,q+1)$. En particular, esto garantiza que todo elemento del álgebra de Lie conforme de $V^{p,q}$ puede exponenciarse para definir globalmente una transformación de$X^{p,q}$,
(ii) $X^{p,q}$ contiene a $V^{p,q}$ como un subconjunto abierto de tal forma que, la acción del subgrupo (producto semidirecto) $\mathbb{R}^+O(p,q) \times V^{p,q} \subset O(p+1,q+1)$, corresponda a la acción usual, y
(iii) en cada punto $x \in X^{p,q}$, el espacio tangente $T_xX^{p,q}$ está dotado, de manera natural, de una métrica de signatura (p,q) definida hasta un factor escalar.

El espacio $X^{p,q}$ se llama entonces *la completación conforme* de $V^{p,q}$. A continuación describiremos cómo determinar el modelo conforme de nuestro interés, $X^{3,1}$. La construcción en el caso general es completamente análoga.

El punto de partida es el subespacio ortogonal real $V^{2,4} \subset M_{\mathbb{C}}$, definido en (29). Dentro de dicho subespacio podemos considerar el cono

$$C = \{v \in V^{2,4} - \{0\} \mid H(v,v) = 0\}, \tag{31}$$

formado por todas las rectas isotrópicas. Es fácil ver que C es una variedad no singular de dimensión cinco en $V^{2,4}$. Además, es evidente que C es estable frente a la acción del grupo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ dada por la multiplicación escalar, de manera que su imagen en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V^{2,4})$ bajo

$$\pi \colon V^{2,4} - \{0\} \to \mathbb{P}(V^{2,4}); \qquad v \mapsto \mathbb{R}v, \tag{32}$$

resulta ser una variedad diferenciable, $\pi(C) = C/\mathbb{R}^*$, de dimensión cuatro. Una manera sencilla de visualizar $\pi(C) \subset \mathbb{P}(V^{2,4})$ se obtiene al descomponer $V^{2,4}$ en la suma ortogonal $V^{2,4} = E^2 \oplus E^4$, siendo H positiva definida en E^2 y negativa definida en E^4. Es claro entonces que,

$$V^{2,4} \simeq E^2 \oplus E^4 \supset S^1 \times S^3 \subset C, \tag{33}$$

con $S^1 \subset E^2$ y $S^3 \subset E^4$ las esferas unitarias en dichos subespacios. Luego, es muy sencillo demostrar que, para cada $v \in C$, existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ definido hasta un signo, tal que $\lambda v \in S^1 \times S^3$. Consecuentemente,

$$\pi(C) = C/\mathbb{R}^* = S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2. \tag{34}$$

Este es el modelo conforme $X^{3,1}$ del espacio-tiempo de Minkowski. Que es homogéneo para la acción de $O(4,2)$ es claro porque dicha acción es transitiva en C y conmuta con la multiplicación por escalares en $V^{2,4}$. Que el espacio-tiempo T está incluido como un abierto de $X^{3,1}$ también es inmediato puesto que $T \simeq \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 \subset S^1 \times S^3$. Verificar que la acción del subgrupo $P_{11} = \mathbb{R}^+ O(3,1) \times T$ (= grupo de Poincaré más transformaciones de escala) se restringe en la manera apropiada es laborioso pero directo [10], [4]. De hecho, se puede demostrar que [10],

$$X^{3,1} = O(4,2)/P_{11}. \tag{35}$$

Finalmente, que el espacio tangente a $X^{3,1}$ viene equipado en cada punto con una métrica en la clase conforme de signatura $(3,1)$ puede verse a partir de la derivada de la función π en (32); ésta induce una sucesión exacta,

$$\begin{gathered} 0 \to \mathbb{R}v \to V^{2,4} \to T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(V^{2,4}) \to 0 \\ x \mapsto \dot{\pi}_v(x) \end{gathered} \tag{36}$$

y en consecuencia, un único isomorfismo, $i_v\colon V^{2,4}/\mathbb{R}v \to T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(V^{2,4})$, tal que $i_v(x + \mathbb{R}v) = \dot{\pi}_v(x)$. De aquí se obtiene la identificación,

$$\begin{aligned} Hom(\mathbb{R}v, V^{2,4}/\mathbb{R}v) &\simeq T_{\mathbb{R}v}\mathbb{P}(V^{2,4}) \\ \tau &\mapsto i_v\big(\tau(v)\big) \end{aligned} \tag{37}$$

que es natural, en el sentido de que no depende de la elección de $v \in \mathbb{R}v$. Por lo tanto, se obtiene una identificación canónica

$$Hom(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^{\perp}/\mathbb{R}v) \simeq T_{\mathbb{R}v}(X^{3,1}), \qquad \text{para todo } v \in C, \tag{38}$$

al notar que, $w \in T_v(C) \subset V^{2,4} \Leftrightarrow w \in (\mathbb{R}v)^{\perp}$. Dado que $\mathbb{R}v$ es isotrópico, H induce en $(\mathbb{R}v)^{\perp}/\mathbb{R}v$ una forma bilineal $\widetilde{H}$ de signatura $(3,1)$ y por lo tanto $T_{\mathbb{R}v}(X_{3,1})$ queda equipado de manera natural con la métrica,

$$B_v(\tau_1, \tau_2) = \widetilde{H}\big(\tau_1(v), \tau_2(v)\big) \tag{39}$$

para todos τ_1 y τ_2 en $Hom(\mathbb{R}v, (\mathbb{R}v)^{\perp}/\mathbb{R}v)$. Resulta entonces que la dependencia de la métrica con respecto a $v \in C$ es la deseada: $B_{\lambda v} = \lambda^2 B_v$.

Ahora bién, toda esta construcción partió de considerar

$$C = \{v \in V^{2,4} - \{0\} \mid H(v,v) = 0\} \subset V^{2,4} \subset M_{\mathbb{C}} = \wedge^2 T_{\mathbb{C}}. \tag{40}$$

Pero la condición $H(v,v) = 0$ significa que v es en realidad descomponible, característica que no se altera bajo multiplicación por escalares. La conclusión es que, cada $\mathbb{R}v \in X^{3,1}$ define de manera única, un subespacio bidimensional de $T_{\mathbb{C}}$ vía la correspondencia (11). Esto demuestra, en particular, que

$$X^{3,1} \subset G_2(T_{\mathbb{C}}), \tag{41}$$

donde $G_2(T_{\mathbb{C}})$ denota la variedad compleja de Grassmann que consiste de todos los subespacios bidimensionales de $T_{\mathbb{C}}$. De hecho, se puede demostrar que $X^{3,1}$ consiste precisamente en *todos los elementos isotrópicos de* $G_2(T_{\mathbb{C}})$. Sin embargo, el punto que queremos enfatizar aquí es la gran analogía que existe entre ésta situación y lo que ocurre al compactificar el plano complejo. Dejamos al lector que juzgue por sí mismo la tabla comparativa siguiente [12]:

Considérese,

el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$	el espacio-tiempo complejificado $T_{\mathbb{C}}$

Al elegir una orientación en el espacio, se obtiene la acción del grupo,

$SL(2,\mathbb{C})$	$SL(4,\mathbb{C})$

En particular, se puede considerar la acción de la forma real

$$SU(1,1) \qquad\qquad\qquad\qquad SU(2,2)$$

en la variedad compacta

$$G_1(\mathbb{C}^2)\ (=\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2) \qquad\qquad G_2(T_{\mathbb{C}})$$

La descripción de esta variedad compleja en coordenadas locales se realiza, vía proyección estereográfica, en términos de

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad\qquad z = x + iy \in \mathbb{C}^{2\times 2}\ (= \text{matrices de } 2\times 2)$$

con,

$$x, y \in \mathbb{R} \qquad\qquad x, y, \in \mathbb{H}^{2\times 2}\ (= \text{matrices hermitianas } 2\times 2)$$

La acción del grupo en coordenadas locales está dada por

$$z \mapsto (cz + d)^{-1}(az + b),$$

con,

$$a, b, c, d \in \mathbb{C} \qquad\qquad\qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$$\bar{c}\, a \in \mathbb{R}; \bar{b}\, d \in \mathbb{R}; \bar{a}\, d - \bar{c}\, b = 1 \qquad c^* a \in \mathbb{H}^{2\times 2}; b^* d \in \mathbb{H}^{2\times 2}; a^* d - c^* b = 1_{2\times 2}.$$

El interior del disco unitario se describe como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\, \bar{z} < 1\} \qquad\qquad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid 1_{2\times 2} - z\, z^* \text{ es positiva definida }\}$$

La frontera de Shilov de este dominio (definida como la subvariedad donde basta conocer una función analítica para determinar sus valores en él) es la variedad compacta real

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\, \bar{z} = 1\} \simeq S^1 \quad U(2) = \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid z\, z^* = 1_{2\times 2}\} \simeq S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$$

En ella actua transitivamente la forma real del grupo SL; se trata de la órbita de los elementos isotrópicos en

$$G_1(\mathbb{C}^2) \qquad\qquad\qquad\qquad G_2(T_{\mathbb{C}})$$

I.9 Sobre las Ecuaciones de Maxwell en el Modelo Conforme del Universo. Una vez en posesión de la variedad diferenciable $X^{3,1}$ en la que modelamos el espacio-tiempo, es posible localizar las construcciones algebraicas de las secciones **I.3** a **I.7** mediante el uso de haces vectoriales. En efecto, en cada punto $x \in X^{3,1}$ tenemos definidos los espacios tangente $T_x(X^{3,1})$ y cotangente $T^*_x(X^{3,1}) = Hom_{\mathbb{R}}(T_x(X^{3,1}), \mathbb{R})$. Este último también es un espacio vectorial equipado con una métrica en la clase conforme de signatura $(3,1)$ y con ella, se induce una métrica—definida hasta un factor escalar—en el haz vectorial

$$\begin{aligned} \pi\colon \wedge T^*(X^{3,1}) = \cup_{x\in X^{3,1}} \wedge T^*_x(X^{3,1}) &\to X^{3,1} \\ \wedge T^*_x(X^{3,1}) \ni \eta &\mapsto \pi(\eta) = x. \end{aligned} \tag{42}$$

Siguiendo la costumbre, denotaremos el espacio de secciones C^∞ del subhaz

$$\wedge^k T^*(X^{3,1}) \to X^{3,1},$$

por $\Omega^k(X^{3,1})$; como es bién sabido, $\Omega(X^{3,1}) = \oplus_k \Omega^k(X^{3,1})$ es el portador del complejo de De Rahm,

$$0 \to \Omega^0(X^{3,1}) \xrightarrow{d} \Omega^1(X^{3,1}) \xrightarrow{d} \Omega^2(X^{3,1}) \xrightarrow{d} \Omega^3(X^{3,1}) \xrightarrow{d} \Omega^4(X^{3,1}) \xrightarrow{d} 0 \tag{43}$$

obtenido con el operador d de la derivada exterior.

Ahora bién, la variedad $X^{3,1}$ es en realidad difeomorfa al grupo de matrices unitarias de 2×2 (véase la tabla comparativa de §**I.8**), por lo que siempre es posible elegir una orientación $\gamma \in \Omega^4(X^{3,1})$ y dar lugar, en cada $x \in X^{3,1}$, a una transformación

$$J_x\colon \wedge^2 T^*_x(X^{3,1}) \to \wedge^2 T^*_x(X^{3,1}) \tag{44}$$

construida con el operador de Hodge como antes. En particular, queda definida una estructura compleja

$$J\colon \Omega^2(X^{3,1}) \to \Omega^2(X^{3,1}). \tag{45}$$

Los campos electromagnéticos resultan ser aquellas secciones $\omega \in \Omega^2(X^{3,1})$ que satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Así pués, el problema de la física consiste en determinar el subespacio

$$\mathcal{M} = \{\omega \in \Omega^2(X^{3,1}) \mid d\omega = 0 \text{ y } dJ\omega = 0\} \tag{46}$$

Observación. Es posible describir $\mathcal{M}$ en una forma ligeramente distinta usando la complejificación del haz de 2-formas diferenciales y la descomposición

$$\begin{aligned} \Omega^2(X)_{\mathbb{C}} &= \Omega^2(X)_+ \oplus \Omega^2(X)_- \\ &= \{J\omega - i\omega \mid \omega \in \Omega^2(X)\} \oplus \{J\omega + i\omega \mid \omega \in \Omega^2(X)\} \end{aligned}$$

De hecho, es muy sencillo verificar que $\mathcal{M} = \{u \in \Omega^2(X^{3,1})_+ \mid du = 0\}$. En lo sucesivo, supondremos que $\Omega^2(X^{3,1})$ denota el espacio de secciones complejas del haz de dos formas diferenciales y por lo tanto descompondremos $\mathcal{M}$ en la forma $\mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$, donde,

$$\mathcal{M}_\pm = \{\omega \in \Omega^2(X^{3,1}) \mid J\omega = \pm i\omega, \text{ y } d\omega = 0\}. \tag{47}$$

Como ya hemos señalado, $\mathcal{M}$ es invariante ante la acción del grupo $O(4,2)$ que, en las formas diferenciales está dada por retroceso[2]

$$\omega_x \mapsto (g \cdot \omega)_x = g(\omega_{g^{-1}(x)}) \tag{48}$$

y conmuta con la diferenciación exterior. El punto crucial consiste en demostrar que, en el subespacio $\Omega^2(X^{3,1})$,

$$\begin{array}{ll} J\,g = g\,J & \text{si } g \text{ preserva la orientación} \\ J\,g = -g\,J & \text{si } g \text{ invierte la orientación} \end{array} \tag{49}$$

de donde se sigue inmediátamente la invariancia de $\mathcal{M}$. Dicho de otra forma: $\mathcal{M}$ es un espacio de representación para el grupo conforme.

Ahora bién, es posible hacer ver que $\mathcal{M}$ tiene definido de manera natural un producto escalar hermitiano invariante y que puede completarse a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. De hecho, dada $\omega \in \mathcal{M}$ siempre se puede escribir $\omega = d\alpha$, para algún $\alpha \in \Omega^1(X^{3,1})$, puesto que el grupo de cohomología de De Rahm $H^2(X^{3,1})$ es trivial. El producto escalar hermitiano en $\mathcal{M}$ viene entonces dado por la fórmula de Kostant [3]

$$(\omega, \eta) = \int_{S^3} \alpha \wedge \bar{\eta}; \qquad \text{con } \omega = d\alpha \tag{50}$$

donde la integración se realiza sobre el 3-ciclo fundamental de $X^{3,1}$. La representación de $O(4,2)$ en $\mathcal{M}$ da entonces lugar a una representación unitaria en $\mathcal{H}$ que es irreducible, pero se puede demostrar que se rompe en cuatro representaciones irreducibles al restringirse a la componente de la identidad (véase §**II.6**).

(Conviene señalar que $\mathcal{H}$ mismo puede incluirse en el espacio de distribuciones $\mathcal{H}^{-\infty}$; lo que se tiene es,

$$\mathcal{H}^\infty = \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-\infty}$$

Físicamente, $\mathcal{H}^{-\infty}$ se puede interpretar como la radiación que vemos localmente, mientras que $\mathcal{M}$ es la radiación de fondo en el universo: no hay ninguna frecuencia privilegiada).

[2] *retroceso;* de la locución inglesa *pullback*

II Las Ecuaciones de Maxwell y el Análisis Armónico

II.1 Sobre un Modelo Compacto del Espacio-Tiempo. Ya hemos visto en **I.8** que el modelo conforme del espacio-tiempo de Minkowski, $X^{3,1}$, es homogéneo para la acción de $O(4,2)$ con grupo de isotropía igual al grupo de Poincaré suplementado con las transformaciones de escala—P_{11}. Hemos mencionado también que, el conjunto $\mathcal{M}$ de soluciones de las ecuaciones de Maxwell es completable—en el sentido de espacios de Hilbert—a un espacio donde el grupo conforme actua unitaria e irreduciblemente.

Ahora bién, cuando uno trata con algún grupo de Lie no compacto pero semisimple (como por ejemplo, $G = SO(4,2)$) existe una técnica muy útil para entender la estructura de sus representaciones unitarias que consiste en restringirlas a un subrupo compacto máximo K y estudiar la descomposición que resulta en irreducibles de K. Al igual de lo que sucede en el caso compacto con subgrupos torales máximos, la elección particular del subgrupo compacto máximo K es totalmente irrelevante, pues cualesquiera dos de ellos son conjugados en G.

Con el fín de aplicar esta técnica a la representación del grupo conforme en el espacio $\mathcal{M}$, es preciso dar una descripción de $X^{3,1}$ en términos de un subgrupo compacto máximo del grupo semisimple $SO(4,2)$. Para ello, considérese—como en **I.8**—la descomposición ortogonal $V^{2,4} = E^2 \oplus E^4$ del subespacio $V^{2,4}$ definido en **I.7**(29). Es claro que el grupo $K = SO(2) \times SO(4)$ preserva dicha descomposición, actua transitivamente en $S^1 \times S^3 \subset E^2 \oplus E^4$ y es—hasta un cubriente—un subgrupo compacto máximo de $SO(4,2)$. El subrupo de isotropía para el modelo conforme $X^{3,1} = S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$ es, simplemente, $K_0 = SO(1) \times SO(3) \times \mathbb{Z}_2 \simeq SO(3) \times \mathbb{Z}_2$. En otras palabras,

$$X^{3,1} = SO(2) \times SO(4)/SO(3) \times \mathbb{Z}_2. \tag{1}$$

II.2 Sobre las Representaciones Inducidas. Sea $P \to Y = P/H$ un haz fibrado principal con grupo de estructura H. Sea $\tau\colon H \to Aut\, V_\tau$ una representación de H en V_τ y sea $P(V_\tau) \to Y$ el correspondiente haz vectorial asociado. Es bién sabido que existe una identificación natural

$$\Gamma\big(P(V_\tau)\big) \simeq \{f\colon P \to V_\tau \mid f(ph) = \tau(h^{-1})f(p), \text{ para todo } h \in H\} \tag{2}$$

donde$\Gamma\big(P(V_\tau)\big)$ es el espacio de secciones del haz vectorial asociado. Si G es un grupo de Lie que opera en P y Y de manera que su acción en P conmuta con la acción dada de H y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times Y & \longrightarrow & Y \end{array} \tag{3}$$

conmuta, se obtiene una representación

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\rho\colon G \to Aut\,\Gamma\big(P(V_\tau)\big), \qquad \text{dada por,}\\ &(\rho_g f)(p) = f(g^{-1}p).\end{aligned}$$

En particular, ésta es precisamente la situación en el caso homogéneo $P = G$ y $Y = G/H$. En este caso particular,

$$(5)\qquad \Gamma\big(P(V_\tau)\big) = C^\infty(\mathrm{Ind}_G\tau)$$

se llama el G-módulo inducido a partir de la representación τ de H. Por ejemplo, si

$$(6)\qquad \tau\colon H \to Aut\,T^*_{eH}(G/H) \simeq Aut\,(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \simeq Aut\,\mathfrak{h}^\perp$$

es la representación del grupo de isotropía en el espacio cotangente, entonces,

$$(7)\qquad \Omega^1(Y) = C^\infty(\mathrm{Ind}_G\tau).$$

En el caso en que $G = K = SO(2) \times SO(4)$, $H = K_0 = SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ y $Y = X^{3,1}$, la representación del subgrupo de isotropía en el espacio cotangente es,

$$(8)\qquad \tau\colon SO(3) \times \mathbb{Z}_2 \to Aut\,(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^1)$$

que viene dada simplemente por la acción de definición de $SO(3)$ en el sumando directo $\mathbb{R}^3$ (la acción de $\mathbb{Z}_2$ es trivial). Por lo tanto,

$$(9)\qquad \Omega^1(X^{3,1}) = C^\infty(\mathrm{Ind}_G\tau) \qquad \text{como } K\text{-módulos.}$$

II.3 Sobre el Teorema de Peter-Weyl. Sea K un grupo de Lie compacto y sea $\hat{K}$ un conjunto de representantes de las clases de equivalencia de todas las representaciones unitarias irreducibles de K. La notación $\lambda \in \hat{K}$ significará $(\lambda, V_\lambda) \in \hat{K}$ con $\lambda\colon K \to Aut\,V_\lambda$ una representación contínua. Al hablar del teorema de Peter-Weyl, el objeto de interés es el K-módulo $L^2(K)$ con respecto a las acciones

$$(10)\qquad \begin{aligned}&\rho_l\colon K \to Aut\,L^2(K) &&\text{y,}\qquad \rho_r\colon K \to Aut\,L^2(K)\\ &\big(\rho_l(g)f\big)(k) = f(g^{-1}k) && \qquad\quad \big(\rho_r(g)f\big)(k) = f(kg).\end{aligned}$$

Nótese que para cada $\lambda \in \hat{K}$ siempre es posible considerar $V_\lambda \otimes (V_\lambda)^* \simeq End\,V_\lambda$ como un subespacio de dimensión finita dentro de $C^\infty(K)$ mediante la siguiente inclusión:

$$V_\lambda \otimes (V_\lambda)^* \to C^\infty(K), \qquad v \otimes v^* \mapsto f_{v\otimes v^*},$$

donde,

$$(11)\qquad f_{v\otimes v^*}(k) = \langle v, \lambda^*(k)\, v^*\rangle$$

siendo, $\lambda^*\colon K \to Aut\,(V_\lambda)^*$ la representación contragrediente a λ con respecto al apareamiento dado por la evaluación $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es muy fácil verificar que

$$\rho_l(g)\, f_{v\otimes v^*} = f_{\lambda(g)(v)\otimes v^*}, \qquad \text{y} \qquad \rho_r(g)\, f_{v\otimes v^*} = f_{v\otimes\lambda^*(g)(v^*)}. \tag{12}$$

En estas circunstancias, se tiene la siguiente situación:

$$\bigoplus_{\lambda\in\hat{K}} V_\lambda \otimes (V_\lambda)^* \subset C^\infty(K) \subset L^2(K) = \sum_{\lambda\in\hat{K}} V_\lambda \otimes (V_\lambda)^*. \tag{13}$$

La suma de la izquierda es una suma directa de subespacios en el sentido algebraico mientras que la suma de la derecha es una suma directa en el sentido de espacios de Hilbert. La igualdad de la derecha es, de acuerdo con el teorema de Peter-Weyl, una igualdad de K-módulos. El teorema de Peter-Weyl también asegura que la multiplicidad con la que ocurre la representación λ en la descomposición de $L^2(K)$ bajo la acción de ρ_l es igual a la multiplicidad con que ocurre λ^* en la descomposición de $L^2(K)$ bajo la acción de ρ_r y ambas iguales a la dimensión común de V_λ; ésto es,

$$\mu_\lambda(\rho_l) = \dim V_\lambda = \dim\,(V_\lambda)^* = \mu_{\lambda^*}(\rho_l). \tag{14}$$

II.4 Sobre Representaciones Inducidas de Grupos Compactos. Lo que queremos hacer ahora es considerar representaciones inducidas a la luz del teorema de Peter-Weyl. Eventualmente lo que habremos de hacer es aplicar los resultados aquí descritos a los K-módulos inducidos $\Omega^i(X^{3,1})$ $(K = SO(2)\times SO(4)\,)$. Por lo pronto, consideremos el caso general: supóngase que $K_0 \subset K$ es un subgrupo cerrado del grupo de Lie compacto K y que nos es dada una representación $\tau\colon K_0 \to Aut\, V_\tau$. Dado que el conjunto de todas las funciones C^∞ de K en el espacio vectorial V_τ se puede identificar con $C^\infty(K)\otimes V_\tau$ (la identificación es tal que $(f\otimes v)(k) = f(k)v$), resulta claro que,

$$C^\infty(\mathrm{Ind}_K\tau) \subset C^\infty(K)\otimes V_\tau \tag{15}$$

de manera que $C^\infty(\mathrm{Ind}_K\tau)$ está generado por aquellos elementos $f\otimes v \in C^\infty(K)\otimes V_\tau$ tales que, para todos $k\in K$ y $g\in K_0$,

$$f(kg)v = f(k)\lambda(g^{-1})v. \tag{16}$$

Ahora bién, correspondiendo a la inclusión $\bigoplus_{\lambda\in\hat{K}} V_\lambda\otimes(V_\lambda)^* \subset C^\infty(K)$, se define,

$$(C^\infty(K)\otimes V_\tau)_{K\#} := \bigoplus_{\lambda\in\hat{K}} V_\lambda \otimes Hom(V_\lambda, V_\tau) \tag{17}$$

Es fácil verificar que la condición de equivariancia (16) se traduce sencillamente en

$$\big(C^\infty(\mathrm{Ind}_K\tau)\big)_{K\#} = \bigoplus_{\lambda\in\hat{K}} V_\lambda \otimes Hom_{K_0}(V_\lambda, V_\tau) \tag{18}$$

y $\big(C^\infty(\mathrm{Ind}_K\tau)\big)_{K\#}$ se llama entonces el subespacio de vectores K-finitos. En este contexto, un resultado importante que conviene recordar, es el teorema de reciprocidad de Frobenius que asegura que

$$Hom_K\big(V_\lambda, C^\infty(\mathrm{Ind}_K\tau)\big) = Hom_{K_0}(V_\lambda, V_\tau) \tag{19}$$

Si además, τ es irreducible, entonces

$$\mu_\lambda(\mathrm{Ind}_K\tau) = \dim Hom_{K_0}(V_\lambda, V_\tau) = \mu_\tau(\lambda|_{K_0}). \tag{20}$$

Nótese que, si τ es irreducible, $Hom_{K_0}(V_\lambda, V_\tau)$ puede describirse de manera muy sencilla con la ayuda del lema de Schur una vez que se conozca cómo se descompone V_λ—visto como un K_0-módulo—en subespacios irreducibles.

II.5 Sobre la Aplicación del Teorema de Peter-Weyl en la Determinación del Subespacio $\mathcal{M}_{K\#}$. Con estos preliminares en mente, podemos tratar de determinar el subespacio de vectores K-finitos, $\mathcal{M}_{K\#}$, del conjunto de soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Para ello, el primer paso consiste en determinar los duales unitarios $\hat{K}$ y $\hat{K}_0$ para[3]

$$K = SO(4) \times SO(2), \qquad \text{y} \qquad K_0 = SO(3) \times \mathbb{Z}_2 \tag{21}$$

Para empezar, notamos que

$$\hat{K} = SO(4)\hat{} \times SO(2)\hat{} \tag{22}$$

Ahora bien, el dual unitario $SO(2)\hat{}$ del grupo de rotaciones del plano es isomorfo al conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros. La parametrización se hace, como es bien sabido, via el caracter $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$. El espacio de representación correspondiente a $n \in SO(2)\hat{}$ es unidimensional y consiste de todos los múltiplos de $e^{in\theta}$.

Para determinar el dual unitario $SO(4)\hat{}$ del grupo de rotaciones en cuatro dimensiones se hace uso del hecho que $SO(4)$ no es simple; se sabe que en realidad, es posible descomponer $SO(4)$ en la forma

$$SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2 \tag{23}$$

de manera que para determinar $SO(4)\hat{}$ basta con usar el hecho de $SU(2)\hat{} \simeq \mathbb{Z}_+$ y conocer la forma en que el centro del grupo, $\mathbb{Z}_2$, intercambia los dos factores $SU(2)$. El resultado es el siguiente:

$$SO(4)\hat{} = \{(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mid m+n \equiv 0 \pmod 2\} \tag{24}$$

[3]Cabe señalar que dicho problema es totalmente independiente del Teorema de Peter-Weyl, en el sentido de que éste último no proporciona información alguna sobre cómo determinar $\hat{K}$. Por ejemplo, la solución de Weyl a este problema consistió en notar que, para cada $\chi \in \hat{K}$, el caracter de χ, definido como la función $K \ni g \mapsto \mathrm{Tr}\,\chi(g) \in \mathbb{C}$, determina la clase de isomorfismo de la representación. Luego, con un argumento bastante ingenioso que combina las propiedades de los grupos de Lie compactos con el teorema mismo de Peter-Weyl, Weyl calculó los caracteres irreducibles de cualquier grupo de Lie compacto (ver [6] y [11]).

El espacio de representación para el par (m, n) es simplemente

$$S^m(\mathbb{C}^2) \otimes S^n(\mathbb{C}^2) \tag{25}$$

siendo $S^m(\mathbb{C}^2)$ el espacio de los polinomios homogeneos de grado m en dos variables complejas. En resumen[4]

$$\hat{K} = \{(m, n, k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} \mid m + n + k \equiv 0 \pmod 2\} \tag{26}$$

y el K-módulo correspondiente a la representación (m,n,k) es

$$S^m(\mathbb{C}^2) \otimes S^n(\mathbb{C}^2) \otimes e^{ik\theta} \tag{27}$$

Por otro lado, conviene recordar que $SU(2)$ es una doble cobertura del grupo especial de rotaciones en tres dimensiones $SO(3)$ y que

$$SO(3)\hat{} \simeq 2\mathbb{Z}_+ \tag{28}$$

El teorema de reciprocidad de Frobenius asegura entonces que la multiplicidad de la representación (m, n, k) en el K-módulo $\wedge^1 X^{3,1}$ es igual a la multiplicidad de la representación estándard de $SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ en la descomposición de la restricción $(m, n, k)|_{SO(3)\times\mathbb{Z}_2}$. En otras palabras, bastará con averiguar cómo se restringe la representación (m, n) de $SO(4)$ al subgrupo $SO(3)$. Este tipo de cuestiones se resuelve mediante la descomposición de Clebsch-Gordan que dice que

$$\pi_m \otimes \pi_n|_{SO(3)} = \pi_{m+n} \oplus \pi_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus \pi_{m-n} \tag{29}$$

Para responder entonces al problema de la multiplicidad nos vemos conducidos a preguntar, ¿cuáles son las condiciones en los enteros m y n para que la descomposición de Clebsch-Gordan contenga a la representación fundamental de $SO(3)$; ésto es, a π_2? La respuesta es que $m - n$ solo puede ser igual a 2, a 0, ó a -2; es decir,

$$|m - n| = \{0, 2\} \tag{30}$$

II.6 Sobre el Empleo de la Forma de Maurer-Cartan para Encontrar Soluciones K-finitas de las Ecuaciones de Maxwell. El objetivo siguiente consiste en explotar la identificación que existe entre el espacio-tiempo compactificado y el grupo de Lie de matrices unitarias de 2×2. Que $X^{3,1} \simeq U(2)$ no es tan dificil de anticipar; después de todo,

$$S^3 \simeq SU(2) \subset U(2) \qquad , S^1 \simeq U(1) \subset U(2) \quad \text{y} \quad S^3 \cap S^1 = \{id, -id\} = \mathbb{Z}_2. \tag{31}$$

[4]La condición $m+n+k \equiv 0 \pmod 2$ resulta de notar cómo actuan $-1 \in SO(2)$ y $-1 \in SO(4)$ en el espacio de representación (27) y de requerir compatibilidad con la acción de $-1 \in SO(2) \times SO(4)$

En particular, se tiene una proyección

$$S^3 \times S^1 \to U(2) \tag{32}$$

Ahora bién, dado que $S^3 \simeq SU(2)$, el teorema de Peter-Weyl conduce a

$$(\Omega^0(S^3))_{SO(4)^\#} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \Omega^0(S^3)_{n,n} \tag{33}$$

donde, $\Omega^0(S^3)_{n,n} = \mathrm{End}S^n(\mathbb{C}^2)$ tiene dimensión $(n+1)^2$ y se ha considerado únicamente la parte $SO(4)$-finita de $\Omega^0(S^3)$ en virtud de que la acción del factor $SO(2)$ es trivial en $\Omega^0(S^3)$.

Nótese que la esfera tridimensional puede obtenerse como un espacio homogeneo de $SO(4)$,

$$S^3 = SO(4)/SO(3) \tag{34}$$

y por lo tanto $\Omega^1(S^3)$ puede verse como una representación inducida desde $SO(3)$ por la representación fundamental. En estas condiciones se obtiene

$$(\Omega^1(S^3))_{K\#} = \bigoplus_{|m-n|=\{0,2\}} \Omega^1(S^3)_{m,n} \tag{35}$$

donde, $\Omega^1(S^3)_{m,n} = S^m(\mathbb{C}^2) \otimes S^n(\mathbb{C}^2)$.

Por otra parte, se puede pensar en S^1 como el subconjunto de las matrices diagonales de 2×2 cuyas entradas son ambas iguales a un número complejo de módulo uno. Luego,

$$(\Omega^0(S^1))_{K\#} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Omega^0(S^1)_n \tag{36}$$

donde, $\Omega^0(S^1)_n = \mathbb{C}\, e^{in\theta}$. Además, recordando que la 1-forma $d\theta$ está bien definida en S^1, se tiene que

$$(\Omega^1(S^1))_{K\#} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, e^{in\theta} d\theta. \tag{37}$$

Considérese ahora la sucesión inducida mediante diferenciación exterior:

$$d : \Omega^0(S^3)_{0,0} \to (\Omega^0(S^3))_{SO(4)^\#} \to (\Omega^1(S^3))_{K\#} \to \Omega^2(S^3) \tag{38}$$

Un lema muy importante en la determinación de las soluciones K-finitas de las ecuaciones de Maxwell es el siguiente

$$\mathrm{Ker} d|_{(\Omega^1(S^3))_{K\#}} = \bigoplus_{|m-n|=\{0,2\}} \Omega^1(S^3)_{m,n} \tag{39}$$

De hecho, una de sus implicaciones es que, en el contexto del espacio de soluciones de las ecuaciones de Maxwell,

$$(\mathcal{M}^{\pm})_{K^{\#}} = \bigoplus_{|m-n|=2} (\mathcal{M}_{m,n,k})^{\pm} \tag{40}$$

pues la descomposición $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{+} \oplus \mathcal{M}^{-}$ es K-estable. Además, $(\mathcal{M}_{m,n,k})^{\pm}$, ó bién es cero, ó bién es irreducible. Éste resultado puede afinarse aún mas con la ayuda de las 1-formas invariantes por la izquierda definidas en el grupo $U(2)$. En efecto, es posible elegir como base de $\Omega^1(X^{3,1})$ el conjunto

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \tag{41}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ son invariantes por la izquierda en $S^3 \simeq SU(2)$, mientras que α_4 es invariante por la izquierda en $S^1 \simeq U(1)$—ésto es, $\alpha_4 = d\theta$. Podemos entonces escribir, para cualquier $\sigma \in (\mathcal{M}_{m,n,k})^{+}$,

$$\sigma = \sum_{\text{cíclica}} B_i \alpha_j \wedge \alpha_k + \sum_i E_i \alpha_i \wedge \alpha_4 \tag{42}$$

La condición $\sigma \in (\mathcal{M}_{m,n,k})^{+}$ significa que bajo la acción del círculo $S^1 \simeq U(1)$, σ se transforma de acuerdo a k, de manera que es posible escribir

$$B_i = \tilde{B}_i e^{ik\theta}, \quad \text{con} \quad \tilde{B}_i \in \mathbb{C}^{\infty}(S^3) \qquad \text{y} \qquad E_i = \tilde{E}_i e^{ik\theta}, \quad \text{con} \quad \tilde{E}_i \in C^{\infty}(S^3)$$

Por lo tanto,

$$\sigma = e^{ik\theta}\{ \sum_{\text{cíclica}} \tilde{B}_i \alpha_j \wedge \alpha_k + \sum_i \tilde{E}_i \alpha_i \wedge \alpha_4 \} = e^{ik\theta}(\rho + \gamma \wedge d\theta) \tag{43}$$

donde,

$$\rho = \sum_{\text{cíclica}} \tilde{B}_i \alpha_j \wedge \alpha_k \in \Omega^2(S^3) \qquad \text{y} \qquad \gamma = \sum_i \tilde{E}_i \alpha_i \in \Omega^1(S^3) \tag{44}$$

En estas circunstancias, y usando fuertemente el hecho de que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ son invariantes por la izquierda en $S^3 \simeq SU(2)$, se tiene que,

$$d\sigma = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\rho = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho = d\beta \quad (\text{porque } H^2(S^3 \times S^1) = \{0\}\ )$$

y por lo tanto,

$$\sigma = e^{ik\theta}(d\beta + \gamma \wedge d\theta), \quad \text{con} \quad \beta, \gamma \in \Omega^1(S^3). \tag{45}$$

Nuevamente, la condición $d\sigma = 0$ conduce ahora a,

(46)

$$d\sigma = de^{ik\theta}(d\beta + \gamma \wedge d\theta) + e^{ik\theta} d\gamma \wedge d\theta = e^{ik\theta}(ikd\beta + d\gamma) \wedge d\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad d(ik\beta + \gamma) = 0$$

En otras palabras, $(ik\beta + \gamma) \in \Omega^1(S^3) \cap \mathrm{Ker} d$ es una 1-forma que se transforma de acuerdo a la representación (m, n), con $m = n$. Pero sabemos que el kernel de d no contiene tales representaciones; por lo tanto,

$$ik\beta + \gamma = 0 \tag{47}$$

y por lo tanto,

$$\sigma = e^{ik\theta}(d\beta - ik\beta \wedge d\theta), \quad \text{con} \quad \beta \in \Omega^1(S^3)_{m,n}. \tag{48}$$

Ahora bién, si $J\sigma = i\sigma$, entonces σ debe ser de la forma $u - iJu$, siendo u de la forma $\Gamma(\,\cdot\,, \wedge^2(\text{subespacio tridimensional})\,)$. Por lo tanto,

$$Jd\beta = k\beta \wedge d\theta. \tag{49}$$

Defínase $\Lambda := \{(m, n) \mid |m - n| = 2$, tales que $\beta \in \Omega^1(S^3)_{m,n}$ satisface, $Jd\beta = k\beta \wedge d\theta$ para algún $k = k(m, n) \in \mathbb{Z}\}$. Nótese que la condición $Jd\beta = k\beta \wedge d\theta$ es una condición irreducible (de hecho, es $SO(4)$-invariante). En otras palabras, si esto vale para algún $k = k(m, n) \in \mathbb{Z}$, entonces vale para todos los pares (m, n) tales que $|m - n| = 2$. El prometido refinamiento de (40) es entonces el siguiente resultado que solo escribimos para $\mathcal{M}^+$:

$$(\mathcal{M}^+)_{K^\#} = \bigoplus_{(m,n)\in\Lambda} (\mathcal{M}_{m,n,k(m,n)})^+ \tag{50}$$

Además, $(\mathcal{M}_{m,n,k(m,n)})^+$ es irreducible y

$$k(n+2, n) = n + 2 \qquad \text{y} \qquad k(n, n+2) = -(n+2) \tag{51}$$

El último paso consiste entonces en construir objetos en $\Omega^1(S^3)_{n,n+2}$; de hecho, se puede demostrar que todo $\beta \in \Omega^1(S^3)_{n,n+2}$ satisface la ecuación

$$Jd\beta = -(n+2)\beta \wedge d\theta \tag{52}$$

y en consecuencia,

$$\sigma = e^{-i(n+2)\theta}(d\beta + i(n+2)\beta \wedge d\theta) \tag{53}$$

es una solución de las ecuaciones de Maxwell. Finalmente, haciendo uso de métodos infinitesimales—ésto es, mediante el álgebra de Lie—es posible demostrar el siguiente

Teorema (Kostant [3]).

$$(\mathcal{M}^+)_{K^\#} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{M}_{n+2,n,n+2})^+ \oplus \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{M}_{n,n+2,-(n+2)})^+$$
$$(\mathcal{M}^-)_{K^\#} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{M}_{n+2,n,-(n+2)})^- \oplus \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{M}_{n,n+2,n+2})^-$$

Además, $\mathcal{M}^+ \wedge \mathcal{M}^- = \{0\}$ y cada una de estas cuatro series, es irreducible bajo la acción de la componente de la identidad $SO(4,2)_e$

Referncias

[**1**] Bateman, H., *The Transformation of the Electrodynamical Equations*, Proc. London Math. Soc. **8** (1910), 223-230.

[**2**] Jacobson, N., *Lie Algebras*, Interscience Publ. Co., New York, 1965.

[**3**] Kostant, B., *Curso sobre Representaciones de Algebras de Lie*, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1985.

[**4**] Sánchez-Valenzuela, O. A., *Electromagnetismo; una invitación al estudio de la geometría y las representaciones del grupo conforme*, Notas de clase, Facultad de Ciencias U.N.A.M., México, D.F., 1987.

[**5**] Sanchez-Valenzuela, O. A., and Sternberg, S., *On the automorphism group of the hermitian superalgebras*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. **1251** (1987), 1-48.

[**6**] Schmid, W., *Representations of Semisimple Lie Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians in Helsinki (1978).

[**7**] Singer, I. y Sternberg, S., *The Infinite Groups of Lie and Cartan*, Jour. D'Analyse Math. **15** (1965), 1-140.

[**8**] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Segunda Edición, Chelsea Pub. Co., New York, 1983.

[**9**] Sternberg, S., *On the Role of Field Theories in our Physical Conception of Geometry*, Springer-Verlag Lect. Notes in Math. **676** (1978), 1-48.

[**10**] Sternberg, S. y Wolf, J. A., *Charge Conjugation and Segal's Cosmology*, Il Nuovo Cimento **28 A** (1975).

[**11**] Wallach, N., *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[**12**] Wolf, J. A., *Fine Structure of Hermitian Symmetric Spaces*, Symmetric Spaces (Boothby y Weiss, eds.), Marcel Dekker Inc., New York, 1972.