Miscelánea Matemática **58** (2013) 21–46 SMM

Poincaré y la teoría de la relatividad: Compartiendo algunas impresiones personales

O. A. Sánchez-Valenzuela
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
adolfo@cimat.mx

Primera parte. Algo de historia

Con frecuencia, cuando estoy dando clase, suelo decir: «el matemático al que le enciendo mis veladoras para que me salgan los teoremas es Henri Poincaré». Normalmente no tengo la oportunidad de explicar el por qué de esta peculiar afirmación; simplemente continúo exponiendo el tema con el que en ese momento esté tratando frente al grupo y ya. Hoy, sin embargo, al tener la oportunidad de escribir este texto con motivo del centenario del fallecimiento de Poincaré, encuentro una excelente oportunidad para explicar de dónde es que saqué lo de encenderle veladoras a Poincaré.

Un poco antes de defender mi tesis doctoral, mi asesor, el profesor Shlomo Sternberg, escribió una reseña del libro *Imagery in Scientific Thought* de Arthur Miller [**11**] en la que expresaba de manera muy interesante y particularmente clara sus puntos de vista y opiniones acerca de los créditos científicos atribuibles a Henry Poincaré en torno al descubrimiento de la teoría de la relatividad. Para entonces, y después de haber convivido durante más de tres años con él como su alumno, yo sabía que era un tema sobre el que le gustaba debatir y siempre con un profundo reconocimiento hacia Poincaré, cosa que quedó perfectamente reflejada en la reseña que hizo de dicho libro.

Su reseña comienza diciendo que una de las mejores maneras de perder amigos y antagonizar con los colegas es la de tomar una postura firme respecto a quién merece el crédito sobre le descubrimiento de la teoría especial de la relatividad; si Einstein o Poincaré. Para contextualizar su posición científico-filosófica, Sternberg toma como punto de partida las reflexiones de Immanuel Kant acerca del espacio y del tiempo vertidas en su *Crítica de la razón pura* [**2**]. En particular, enfoca nuestra atención hacia lo que Kant consideraba «principios *a priori*» —entendidos como los principios que servían para organizar nuestros juicios y conformar la esencia de nuestro conocimiento— en contrapartida con lo que el propio Kant consideraba «principios *a posteriori*» y que consistían en las inferencias que realizamos a partir de nuestra experiencia y de nuestras observaciones [**2**].

Rápidamente Sternberg ubica a Poincaré como un representante del espíritu Kantiano afirmando que Poincaré consideraba que nuestra mente estaba «preprogramada» para reconocer las estructuras de los grupos y usar a los a grupos —especialmente a los grupos de Lie— como principios organizadores de nuestro conocimiento. Para decirlo con el mismo lenguaje, Kant argumenta ampliamente en [**2**] que nuestra mente está «preprogramada» para reconocer como principio organizador del conocimiento a la geometría. Concretamente, la geometría Euclidiana; la geometría hiperbólica de Lobachevsky ve la luz unos 45 años después de la primera edición de la clásica obra de Kant.

Debo decir que desde que conocí a Sternberg como profesor en clase, pude ver en él a un gran estudioso y conocedor de la vida y del trabajo de Poincaré. Por él supe que Poincaré no daba clases de matemáticas sino de física en la Universidad de París (La Sorbona), pero que sus clases de física le daban el pretexto y la ocasión que siempre buscaba para hablar sobre filosofía de la ciencia por un lado, y por otro, para traducir sus ideas en afirmaciones que pudieran demostrarse de manera rigurosa en el terreno de la matemática. Un buen día le pedí que me recomendara un libro de Poincaré para comenzar a entenderlo por mi propia cuenta y me refirió a *Ciencia e Hipótesis* [**8**]. Allí, Poincaré reconoce muy claramente que los modelos físicos comparten, tanto un carácter convencional derivado de las hipótesis subyacentes, como un carácter provisional, en tanto que las observaciones y los resultados de ciertos experimentos clave pueden modificar de manera rotunda dichos modelos. He incluído un Apéndice a este artículo en el que he recopilado algunas citas de Poincaré, tomadas de sus obras más conocidas sobre filosofía de la ciencia, en las que, en mi opinión, se evidencia lo profundo y trascendente de sus reflexiones en la interrelación física-geometría.

Una ejemplificación clara de cómo respaldaba Poincaré sus argumentos científicos en principios y bases de filosofía científica —tanto la desarrollada por él mismo, como la elaborada por otros pensadores y filósofos de la ciencia— se puede observar en las objeciones que expresó respecto a las explicaciones que ofrecieron Hendrik Lorentz y George Fitzgerald en relación a los resultados del célebre experimento de Albert Michelson y Edward Morley realizado en 1887 y en el que se esperaba observar el movimiento relativo de la materia a través del presunto éter estacionario —el medio que se conjeturaba que debía soportar la propagación de la luz. En dicho experimento se buscaba observar una diferencia entre las velocidades de propagación de la luz cuándo ésta viajaba a lo largo de una trayectoria alineada al movimiento de la tierra y cuando viajaba a lo largo de una trayectoria perpendicular a ella. El experimento no detectó diferencia alguna y la explicación Lorentz-Fitzgerald fue que los objetos materiales debían sufrir una contracción o acortamiento en una dirección preferencial. En concreto, propusieron que uno de los brazos del interferómetro usado por Michelson y Morley en su experimento se encogía en la dirección alineada a la del movimiento de la tierra, pero no en la dirección perpendicular y que por lo tanto dicha contracción compensaba exactamente el fenómeno interferométrico que esperaban haber visto y que nunca detectaron. La explicación de Lorentz y de Fitzgerald pasó a ser referida como la «contracción de Lorentz».

Poincaré y Lorentz mantuvieron una nutrida correspondencia científica a raíz, precisamente, de las predicciones derivadas por Lorentz en la teoría electromagnética. Dentro de éstas, Lorentz ya había escrito y difundido sus célebres transformaciones de mediciones de espacio y de tiempo entre dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo con velocidad constante uno respecto al otro y había introducido la noción de «tiempo local» con el fin de explicar los procesos electromagnéticos descritos desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad v respecto al éter estacionario. La diferencia entre el «tiempo verdadero» y el «tiempo local» resultaba depender del punto x' en el eje a lo largo del cual ocurría el movimiento relativo al éter y estaba dada por vx'/c^2, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Lo que en aquella época resultaba muy extraño era que una diferencia de mediciones de tiempo dependiera de una posición en el espacio.

Desde 1895 Poincaré objetó seriamente la teoría de la «contracción de Lorentz» [**3**]. El argumento de Poincaré era que debíamos reconocer que, experimentos como el de Michelson y Morley evidenciaban la imposibilidad de detectar el movimiento absoluto de los cuerpos materiales con respecto al éter. De hecho, Poincaré desarrolló ideas muy elaboradas sobre el movimiento relativo de cuerpos materiales. En su libro *Ciencia y método* (1897) [**9**] dedica una amplia sección a la discusión de la relatividad espacial y temporal, elaborando precisamente sobre el por qué no podía tener sentido físico medible alguno el hablar de un espacio absoluto o de un tiempo universal.

Durante los siguientes años Poincaré pulió estas ideas. Para 1900 había propuesto un método operacional para sincronizar relojes entre sistemas de referencia en movimiento relativo [**5**, **4**, **6**]. De hecho, Poincaré reconoció la importancia que tenía el concepto de «tiempo local» introducido por Lorentz dentro de su esquema de sincronización de relojes. La sincronización propuesta por Poincaré requería que una serie de observadores situados en diversos puntos x' del eje a lo largo del cual se mueve uno de los sistemas de referencia respecto a otro intercambiaran señales de luz con un observador situado en el origen. Para este fin, Poincaré hizo explícita la hipótesis de que la velocidad de la luz es constante e independiente de la velocidad de la fuente que la emite. La diferencia entre los tiempos «verdadero» y «local» de Lorentz, decía Poincaré, proporciona una medida de lo fuera de sincronía que se encontraría el reloj en x' con respecto al reloj del origen. Además de esto, Poincaré explica que, aunque los tiempos en marcos de referencia en movimiento relativo uno respecto a otro difieren entre sí, un observador en cualquiera de estos sistemas sería incapaz de detectar movimiento absoluto alguno respecto a un sistema preferencial y presuntamente en reposo —por ejemplo, el del éter estacionario— porque no podrían advertir si sus relojes están en, o fuera de, sincronía con respecto al del marco de referencia fijo.

Es increíble cómo —como lo señala enfáticamente Supurna Sinha [**10**]— Poincaré, el matemático, se da cuenta de la importancia que tiene darle un significado operacional y físico al concepto de «tiempo local» mientras que para Lorentz, el físico, solamente se trataba de un artilugio matemático para simplificar las ecuaciones de la teoría electromagnética.

Poincaré había depurado tanto sus consideraciones sobre la relatividad del espacio y del tiempo que, en una conferencia celebrada dentro del programa científico que tuvo lugar en Saint Louis Missouri con motivo de la Feria Mundial de 1904 [**7**], enunció su célebre «Principio de la relatividad» estableciendo que, las leyes de la física deben ser las mismas cuando se las describe, ya sea desde un sistema de referencia inercial, o desde un sistema de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme relativo al primero; en particular, reitera que no hay forma experimental alguna para decidir si uno de los observadores está realmente en reposo absoluto.

En el mismo año, 1904, Poincaré asegura que las fórmulas ya conocidas como «las transformaciones de Lorentz» se podían demostrar a partir de su «Principio de la relatividad». Un punto importante en su propia deducción de dichas fórmulas fue el considerar que debían obedecer una ley de composición de grupo. De ahí que inmediatamente comenzara a referirse a ellas como *el grupo de transformaciones de Lorentz* y las considerara análogas a las del *grupo de transformaciones de Galileo*.

¿No estaban entonces ya puestas sobre la mesa —y puestas por Poincaré mismo— todas las piezas con las que había de integrarse la teoría de la relatividad? ¿Por qué entonces conocemos la teoría de la relatividad como «la teoría de la relatividad de Einstein» y no como «la teoría de la relatividad de Poincaré»? En la opinión de la gran mayoría de los estudiosos del tema se debe a que Poincaré aún creía que su principio de la relatividad estaba por deducirse de alguna versión adecuadamente revisada de la electrodinámica. En otras palabras, como lo señala Supurna Sinha, Poincaré no estaba listo para dar el importante paso de eliminar el concepto del éter [**10**].

Hay demasiadas coincidencias en la literatura en cuanto a que, la gran aportación de Einstein, fue comprender que las transformaciones de Lorentz jugaban un papel mucho más general y fundamental en la física; que no dependían de la teoría electromagnética, ni su rango de aplicabilidad se circunscribía a la electrodinámica, sino que su carácter general las promovía a un nivel cinemático completamente fundacional. Se puede reconocer y comprobar que Einstein sí expresó claramente que «los efectos relativistas» como la contracción de Lorentz o el aparente incremento en la masa de un electrón cuando éste se mueve a velocidades cercanas a la de la luz, podían comprenderse desde una base puramente cinemática; en particular, que ese aparente incremento observado en la masa del electrón se observaría en cualquier objeto material en movimiento y no solamente en los objetos cargados eléctricamente. En palabras retrospectivas del propio Einstein (cita tomada del libro de Max Born *Physics in my generation*): «Lo nuevo fue darse cuenta que las transformaciones de Lorentz trascendían su conexión con las ecuaciones de Maxwell y que en realidad tenían que ver con la naturaleza del espacio y del tiempo en general.»

Alguna vez Sternberg me comentó que para 1905, el año de la publicación del célebre artículo de Einstein, Poincaré estaba en sus años cincuenta y era un matemático con una gran reputación, prestigio y reconocimiento; que seguramente, el tratar de cuidarlos, chocaba con aventurarse a proclamar un descubrimiento en la física. Mucho menos atreverse a calificar de «revolucionario» un trabajo de su autoría. Por el contrario. Al parecer, siempre fue muy cauteloso y cuidó mucho la forma en que comunicaba sus resultados y hallazgos. Siempre daba el debido crédito a los científicos sobre cuyo trabajo él elaboraba. Tal fue el caso con los temas que abordó derivados de las transformaciones de Lorentz; Poincaré siempre se refirió a «la teoría de Lorentz» [**4**]. Sin embargo, al tomar en cuenta sus reflexiones en torno a la luz, a la sincronización de relojes y al principio de la relatividad, uno no puede dejar de preguntarse si de verdad las habrá considerado exclusivamente enmarcadas en la electrodinámica de Lorentz. A la luz de sus posiciones filosóficias y de sus reflexiones en torno a las inconsistencias que conllevan un espacio absoluto o un tiempo universal, cuesta mucho trabajo creer que Poincaré no haya caído en la cuenta de que las transformaciones de Lorentz conducían a una reconceptualización del espacio y del tiempo físicos.

Por otra parte, Einstein era mucho más joven —de hecho, veinticinco años más joven que Poincaré— y no tenía una reputación o una trayectoria científica que cuidar o arriesgar. Ahora bien, en la primera parte de su célebre artículo, Einstein propone, entre otras cosas, postular que la velocidad de la luz es constante e independiente de la velocidad de la fuente que la emite y discute el concepto de simultaneidad, y por ende de sincronización de relojes, entre sistemas de referencia en movimiento relativo. Pero Poincaré ya las tenía publicados trabajos en los que discutió ambas ideas. De ahí que algunos autores encuentren muy difícil creer algo que Einstein sostuvo durante toda su vida: que él nunca tuvo conocimiento de los trabajos de Poincaré antes de 1905.

El que la historia le haya dado el crédito a Einstein por la teoría de la relatividad parece haber sido porque, al comunicar sus resultados en la manera en que lo hizo, enfatizando como punto central que la naturaleza de las transformaciones de Lorentz tenía todo que ver con nuestra percepción física, medible y operacional del espacio y del tiempo, provocó, prácticamente al instante, no solo un cambio conceptual en la teoría electrodinámica desarrollada por Lorentz, sino una profunda reconceptualización de la cinemática y por ende, de toda la física. A la par de esto, y de acuerdo a algunos estudiosos del tema, no hay que perder de vista el hecho de que las opiniones expresadas por reconocidos científicos de la época, ayudaron a concentrar y a enfocar la atención en el artículo de Einstein y por lo tanto, a incrementar sus créditos por el descubrimiento de la teoría de la relatividad, ante la presumible desventaja de Poincaré de ser mejor conocido como matemático y de tener un público muy restringido de físicos conocedores de sus artículos previos al de Einstein.

Tal es el caso, por citar solamente un ejemplo, de la opinión expresada por August Wiktor Witkowski, reconocido físico polaco fundador del primer departamento de física teórica moderna en Cracovia en 1910. De acuerdo a Kevin Brown [**1**], Witkowski diseminó la opinión de que Einstein era el nuevo Copérnico, en el sentido de que Einstein estaba arrojando luz y entendimiento a nuestras concepciones del espacio y del tiempo gracias a una interpretación muy *sui generis*, vertida en su artículo de 1905, de la misma manera en que Copérnico iluminó el modelo astronómico de Ptolomeo por el solo hecho de proponer la interpretación alternativa de describir el movimiento de los astros y planetas con respecto al sistema en el que el sol está en reposo y no la tierra. La duda inmediata es, desde luego, si Witkowski conocía los trabajos publicados por el matemático Poincaré o no.

En este punto me permito invitar al lector o lectora a buscar y consultar la gran cantidad de referencias que pueden encontrarse en el internet. En particular, hay un apartado de la wikipedia dedicado especialmente a la disputa de quién merece créditos por el descubrimiento de la teoría especial de la relatividad: `http://en.wikipedia.org/wiki/Relativity_priority_dispute`

Antes de cerrar esta primera parte quisiera compartir una experiencia más: algo que ante el más mínimo pretexto, Sternberg no dejaba de mencionar en charlas amistosas o en sus clases. Y es que en *Ciencia e Hipótesis*, Poincaré no solo describe las tres geometrías mejor conocidas en dos dimensiones —la euclidiana, la elíptica de Riemann y la hiperbólica de Lobachevsky y Bolyai— sino que ahí mismo da cuenta de una «cuarta geometría» —la de Minkowski— de la que el propio Poincaré escribe lo siguiente:

> De entre los axiomas implícitos [de la geometría] hay uno que merece particular atención porque cuando se le abandona, se puede construir una cuarta geometría que resulta tan congruente como las de Euclides, Lobachevsky y Riemann. Para demostrar que siempre se puede trazar una perpendicular desde el extremo A de un segmento AB, uno considera un segmento auxiliar AC, originalmente coincidente con AB, pero que puede girar alrededor de A y que puede llevarse hasta una posición final en la que CA es la prolongación del segmento original AB. Aquí hay dos suposiciones. La primera, que tal rotación es posible. La segunda, que la rotación de un segmento se puede continuar hasta volverse la continuación del segmento inicial. Si se admite la primera suposición y se rechaza la segunda, nos veremos conduci-

> dos a una serie de teoremas más extraños aún que los de Lobachevsky y Riemann pero igualmente exentos de contradicción. Por citar uno de tales teoremas, y ni siquiera el más singular, *una recta puede ser perpendicular a sí misma*.

Como lo señala Sternberg en un lenguaje moderno y conciso [**11**], Poincaré notó que, el estudio de las geometrías en dimensión dos, realmente consistía en determinar todos los grupos de Lie de dimensión tres que actuaran transitivamente en un espacio de dimensión de dos. En el propio análisis de Poincaré, él reduce esta cuestión a estudiar ciertas superficies cuadráticas:

> Si la superficie fundamental es un elipsoide, la forma cuadrática es precisamente la de Riemann. Si se trata del hiperboloide de dos hojas, es la de Lobachevsky. Si dicha superficie es un paraboloide elíptico, la geometría se reduce a la de Euclides. Ésta es un caso límite de las otras dos. Queda claro que no hemos agotado la lista de todas las geometrías cuadráticas porque no hemos considerado el hiperboloide de una hoja ni sus diversas formas degeneradas [...]. ¿Qué es lo que tiene la geometría asociada al hiperboloide de una hoja que hasta ahora había escapado a la atención de los teóricos? Que implica las siguientes proposiciones:
>
> 1. La distancia entre dos puntos situados sobre un mismo generador de la superficie es cero.
> 2. Que hay dos tipos de líneas rectas: el primer tipo corresponde a secciones diametrales elípticas; el segundo a secciones diametrales hiperbólicas. Es imposible que mediante un movimiento real pueda llevarse una recta de un tipo al otro.
> 3. Es imposible hacer que una línea recta se invierta girándola mediante una rotación real alrededor de uno de sus puntos —cosa que sí ocurre en la geometría Euclidiana haciendo una rotación de 180 grados alrededor de cualquier punto sobre la recta.

En lenguaje moderno, Sternberg aclara en [**11**] que esta cuarta geometría descrita por Poincaré es la versión bidimiensional del espacio de de Sitter. Es decir, uno puede considerar el grupo $SO(1,2)$ como el grupo de isometrías de la geometría de Lobachevsky $SO(1,2)/SO(2)$.

Pero $SO(1,2)$ también se puede ver como el grupo de automorfismos del espacio de de Sitter bidimensional $SO(1,2)/SO(1,1)$. Una de las formas degeneradas de este hiperboloide de una hoja es el paraboloide hiperbólico. La geometría correspondiente es la del espacio de Minkowski bidimensional. Las propiedades (1), (2) y (3) a las que se refiere Poincaré son, respectivamente, (1) la existencia de direcciones nulas; (2) la división de todas las demás direcciones en direcciones *espaciales* y *temporales*; y (3) la imposibilidad de realizar una transformación de Lorentz que lleve una línea de universo que tiene velocidad menor a la de la luz, a otra con velocidad mayor a la de la luz, o viceversa.

Retrospectivamente, una de las grandes enseñanzas de la teoría de la relatividad, es que no hay una noción bien definida de *espacio* o de *tiempo,* sino que lo que hay es una noción tetradimensional de *un espaciotiempo.* Al parecer, la expresión de esta síntesis se debe a Hermann Minkowski, ex profesor de Einstein, quien en 1907 desarrolló el modelo geométrico asociado a la invariancia de la forma cuadrática $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$.

Segunda parte. Algunas explicaciones cuantitativas

Después de echarles un vistazo a las citas recopiladas en el Apéndice, y de tener en cuenta que, para Poincaré, presumiblemente, una manera natural de organizar nuestro entendimiento y conocimiento del mundo físico, era a través de la teoría de grupos de Lie, abordaremos, con el fin de ilustrar de manera concreta el «¿cómo imaginamos que lo haría Poincaré?», el problema de determinar, bajo hipótesis apropiadamente restringidas a un mundo espacialmente unidimensional, *los posibles grupos* de *observadores inerciales.*

Trataremos primeramente, con todo detalle, el problema conocido como «el elevador de Einstein». Después de ello enunciaremos el «Principio de la relatividad» o «Principio de equivalencia entre los observadores inerciales» desde un punto de vista suficientemente preciso para conducirnos a un grupo muy general a partir del cual podremos determinar, bajo ciertas hipótesis especiales, los subgrupos de Galileo y de Lorentz.

Problema. Un elevador se encuentra en el último piso de un edificio muy alto. Dentro de él se encuentra un físico con una pelota en su mano. Al tiempo $t = 0$, se rompe la cuerda del elevador y éste cae libremente junto con el físico que va adentro. En el instante $t_0 > 0$

el físico lanza verticalmente hacia arriba su pelota imprimiéndole para ello una velocidad inicial que —según él— tiene el valor v_0.

La misma serie de eventos está siendo registrada por otro físico que se encuentra en la planta baja del edificio (al nivel del suelo).

¿Cómo describe el experimentador del elevador?

(a) su propio movimiento;

(b) el movimiento de la pelota;

(c) el movimiento del experimentador en la planta baja.

¿Cómo describe el experimentador del suelo?

(a') su propio movimiento;

(b') el movimiento de la pelota;

(c') el movimiento del experimentador en el elevador.

Responderemos a estas preguntas en el orden inverso en que se han planteado.

Comenzamos con la descripción que realiza el experimentador del suelo del movimiento del elevador a partir del instante $t = 0$ en que se rompe la cuerda. Su descripción es:

$$t \quad \mapsto \quad x_e(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + h_0.$$

Para ello, el experimentador del suelo ha elegido un marco de referencia cuyo origen está en el suelo (*e.g.*, el sitio donde él se encuentra) y cuya dirección positiva es «hacia arriba». En particular, la descripción que él hace de sí mismo es $t \mapsto x_s(t) = 0$ para todo t. La posición del elevador en el instante $t = 0$ es $h_0 > 0$.

El movimiento de la pelota, visto desde el suelo, es de caída libre. El instante a partir del cual se comienza a hacer la descripción es $t_0 > 0$. La posición inicial es $x_e(t_0)$ y la velocidad inicial v_0' es hacia arriba (*i.e.*, positiva). Por lo tanto, la descripción de dicho movimiento es,

$$t \quad \mapsto \quad x_p(t) = -\frac{1}{2}\, g\, (t - t_0)^2 + v_0'(t - t_0) + x_e(t_0).$$

La descripción que hace el experimentador en el elevador del movimiento de la pelota —digamos $t \mapsto \tilde{x}_p(t)$— debe estar relacionada con la descricpión hecha por el experimentador en el suelo de la siguiente manera:

$$\tilde{x}_p(t) = x_p(t) - x_e(t), \qquad \text{para todo } \ t \geq t_0.$$

Obsérvese que,

$$\begin{aligned} x_p(t) - x_e(t) &= -\frac{1}{2}\, g\, (t - t_0)^2 + v_0'(t - t_0) + x_e(t_0) - \left(-\frac{1}{2}\, g\, t^2 + h_0 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\, g\, (t - t_0)^2 + v_0'(t - t_0) + \left(-\frac{1}{2}\, g\, t_0^2 + h_0 \right) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2}\, g\, t^2 + h_0 \right) \\ &= (v_0' + g t_0)\, (t - t_0). \end{aligned}$$

Sin embargo, desde el punto de vista del experimentador en el elevador —sin hacer referencia alguna al observador en el suelo— la descricpión del movimiento de la pelota debe verse simplemente como un movimiento rectilíneo y uniforme con velocidad v_0. Si el marco de referencia elegido por el experimentador del elevador tiene por origen el sitio del elevador donde él se encuentra (de manera que la descripción que él hace de sí mismo es $t \mapsto \tilde{x}_e(t) = 0$ para todo t) y toma por dirección positiva «hacia arriba», entonces, su descripción del movimiento de la pelota a partir del instante $t = 0$ debe ser:

$$t \quad \mapsto \quad \tilde{x}_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; 0 < t < t_0, \\ v_0(t - t_0) & \text{si} \;\; t \geq t_0. \end{cases}$$

En consecuencia, al comparar con la descripción del observador en el suelo, se encuentra que

$$v_0' = v_0 - g t_0.$$

La interpetación de esta relación es sencilla: desde el punto de vista del observador en el suelo, el elevador llevaba una velocidad negativa (*i.e.,* el elevador se estaba moviendo «hacia abajo») igual a $g t_0$ justo en el instante en que el observador del elevador lanza la pelota verticalmente hacia arriba. En otras palabras, para el observador en el suelo *las velocidades se suman algebraicamente*.

Nótese, finalmente, que la descripción que hace el experimentador del elevador del experimentador en el suelo es la siguiente:

$$t \quad \mapsto \quad \tilde{x}_s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 - h_0.$$

El punto a ilustrar con esto es la simetría de las descripciones dadas por un observador y otro. Aunque sus descripciones del movimiento de la pelota son diferentes, lo que pueden decir respecto a eventos concretos que involucren a la pelota es enteramente similar. Por ejemplo: ¿en qué instante la pelota y el observador del suelo estarán en el mismo sitio? Ambos observadores dan la misma respuesta.

Ejercicio. Suponer que en el instante t_0 el observador del suelo lanza también una pelota p' verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial que, según él, es w_0. ¿Cómo describe el observador del elevador el movimiento $t \mapsto \tilde{x}_{p'}(t)$ de esta pelota?

Sistemas de referencia inerciales. La primera ley de Newton y el grupo de observadores inerciales

Para centrar la discusión y fijar ideas, consideremos el contexto proporcionado por el problema del elevador recién discutido. En ese contexto, podemos preguntar: ¿Cómo (o con base en qué) se puede preferir la descripción de un observador en lugar de la del otro? Puede darse una primera respuesta alegando que en este problema *existe mayor evidencia experimental* para pensar que en definitiva la descripción que hace el observador del elevador romperá abruptamente la simetría. Dicho de manera chusca: el físico del elevador no vivirá para ver el final de la película. Alterará bruscamente su estado de movimiento al chocar contra el suelo. De manera más concisa, *el criterio* para decidir o preferir la descripción de un observador sobre la de otro lo proporcionará la *Primera Ley de Newton*:

La forma en que la mayoría de nosotros recuerda el enunciado de la primera ley de Newton es más o menos la siguiente: *un cuerpo sobre el que no actúan fuerzas, conserva su estado de movimiento rectilíneo y uniforme;* esto es, en línea recta y *sin aceleración.* El contenido neto de esta afirmación es que si no hay fuerza, no hay acelarción (*i.e., No Fuerza* $\Rightarrow$ *No Aceleración*). Equivalentemente, si hay aceleración es porque actúa una fuerza (*i.e., Fuerza* $\Leftarrow$ *Aceleración*). En otras palabras, la aceleración observada en el movimiento de un objeto es imputable a la presencia de fuerzas. Pero esto sólo sucede en los *sistemas de referencia inerciales*. De ahí que la primera ley de Newton sirva precisamente para caracterizarlos y, de hecho, definirlos. En particular, desde un punto de vista muy apegado a la lógica y al espíritu de la matemática, la primera ley de Newton puede enunciarse así:

Primera ley de Newton. Un observador (o sistema de referencia) es inercial si la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{No Fuerza} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{No Aceleración.}$$

En el ejemplo del elevador, si hubieran más objetos fijos en el sistema de referencia del observador $\mathcal{O}$ del suelo que en el sistema de referencia del observador $\tilde{\mathcal{O}}$ del elevador, sería *más fácil* o, como dice Poincaré (ver el Apéndice), *más conveniente*, pensar que $\tilde{\mathcal{O}}$ no es inercial porque su aceleración es atribuible al *campo gravitacional* de la tierra.

Por completitud, conviene hacer notar que en este contexto lógico, la *Segunda Ley de Newton* se enunciaría de la siguiente manera:

Segunda ley de Newton. En un sistema de referencia inercial, la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{No Fuerza} \qquad \Longleftarrow \qquad \text{No Aceleración.}$$

De hecho, se observa la relación $F = ma$, siendo m una constante.

Para los fines que perseguimos en esta exposición, la consecuencia más importante de la primera ley de Newton es el siguiente,

Principio de equivalencia o relatividad de Poincaré. Si dos sistemas de referencia —digamos $\mathcal{O}$, con mediciones $\{x, t\}$ y $\tilde{\mathcal{O}}$ con mediciones $\{\tilde{x}, \tilde{t}\}$— al describir el movimiento de un mismo objeto de referencia R arbitrario —digamos, $t \mapsto x_R(t)$, según $\mathcal{O}$ y $\tilde{t} \mapsto \tilde{x}_R(\tilde{t})$, según $\tilde{\mathcal{O}}$— tienen la propiedad de que,

$$x_R''(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x}_R''(\tilde{t}) = 0,$$

entonces $\mathcal{O}$ y $\tilde{\mathcal{O}}$ son físicamente indistinguibles; es decir, no existe fuerza alguna que identifique uno y que no pueda también identificar el otro.

Esta formulación del Principio de Equivalencia entre observadores inerciales tiene la virtud de proporcionar un criterio matemático conciso para caracterizar las relaciones que deben guardar entre sí las observaciones de espacio y tiempo registradas por dos observadores inerciales cualesquiera. De hecho, es fácil argumentar que si existe un sistema de referencia inercial, existen muchos y además, que el conjunto de todos los sistemas de referencia inerciales tiene, de manera natural, la estructura de un *grupo*.

En efecto, consideremos el conjunto de todas las transformaciones

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2,& \\ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x,t) \\ h(x,t) \end{pmatrix},& \end{aligned}$$

diferenciables, invertibles y con inversa,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \supset \tilde{U} \to U \subset \mathbb{R}^2,& \\ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(\tilde{x},\tilde{t}) \\ H(\tilde{x},\tilde{t}) \end{pmatrix},& \end{aligned}$$

diferenciable, tales que, para cada curva $t \mapsto x(t)$ y su correspondiente imagen $\tilde{t} \mapsto \tilde{x}(\tilde{t})$, se verifique que,

$$x''(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x}''(\tilde{t}) = 0.$$

Obsérvese que, dada $t \mapsto x(t)$, se obtiene que, $\tilde{t} = h(x(t), t) = \phi(t)$; esto es, una función que solamente depende de t. Supondremos que esta función es diferenciable y con derivada distinta de cero en una vecindad, de manera que se puede garantizar que la función inversa también es diferenciable:

$$t = \phi^{-1}(\tilde{t}) \qquad \text{y} \qquad (\phi^{-1})'(\tilde{t}) = \frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\big)}.$$

Obsérvese que,

$$\phi'(t) = h_x(x(t), t)\, x'(t) + h_t(x(t), t),$$

de manera que,

$$(\phi^{-1})'(\tilde{t}) = \frac{1}{h_x\big(\, x\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big), \phi^{-1}(\tilde{t})\,\big)\, x'\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big) + h_t\big(\, x\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big), \phi^{-1}(\tilde{t})\,\big)}.$$

Sin embargo, abreviaremos la notación y escribiremos simplemente,

$$(\phi^{-1})' = \frac{1}{h_x x' + h_t}.$$

Por otro lado, de $\tilde{x} = g(x, t)$, y de $t \mapsto x(t)$ se obtiene $\tilde{x}(t) = g(x(t), t)$ y poniendo $t = \phi^{-1}(\tilde{t})$ se obtiene la curva imagen,

$$\tilde{t} \quad \mapsto \quad \tilde{x}(\tilde{t}) = g\big(\, x\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big), \phi^{-1}(\tilde{t})\,\big).$$

En consecuencia,

$$\tilde{x}'(\tilde{t}) = \Big(g_x\big(\, x\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big), \phi^{-1}(\tilde{t})\,\big)\, x'\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big) + g_t\big(\, x\big(\phi^{-1}(\tilde{t})\,\big), \phi^{-1}(\tilde{t})\,\big) \Big)\, (\phi^{-1})'(\tilde{t}).$$

Abreviamos todo esto escribiéndolo simplemente así:

$$\tilde{x}' = \frac{g_x x' + g_t}{h_x x' + h_t},$$

y entendiendo que la derivada $\tilde{x}'$ que aparece en el lado izquierdo es con respecto al argumento $\tilde{t}$, mientras que las derivadas x' que aparecen en el lado derecho son con respecto al argumento t. No es difícil entonces demostrar que,

$$\begin{aligned}\tilde{x}'' = &\frac{(h_x x' + h_t)(g_x x'' + g_{xx}(x')^2 + 2g_{xt}x' + g_{tt})}{(h_x x' + h_t)^3} \\ &- \frac{(g_x x' + g_t)(h_x x'' + h_{xx}(x')^2 + 2h_{xt}x' + h_{tt})}{(h_x x' + h_t)^3},\end{aligned}$$

donde nuevamente, la derivada $\tilde{x}''$ que aparece en el lado izquierdo es con respecto al argumento $\tilde{t}$, mientras que las derivadas x'' y x' que aparecen en el lado derecho son con respecto al argumento t. Luego, la condición $\tilde{x}'' = 0$ si y sólo si $x'' = 0$ se cumplirá, si y sólo si, para cualquier trayectoria $t \mapsto x(t)$ y para cualquier valor de la velocidad x', se tiene,

$$(h_x x' + h_t)(g_{xx}(x')^2 + 2g_{xt}x' + g_{tt}) = (g_x x' + g_t)(h_{xx}(x')^2 + 2h_{xt}x' + h_{tt}),$$

de manera que las funciones h y g deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$h_x g_{xx} = g_x h_{xx}, \qquad h_t g_{tt} = h_{tt} g_t, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} g_{xx} & 2g_{xt} \\ 2g_{xt} & g_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t \\ h_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{xx} & 2h_{xt} \\ 2h_{xt} & h_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_t \\ g_x \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Con argumentos físicos podemos convencernos de que hemos de buscar soluciones g y h, tales que $g_x \neq 0$ y $h_t \neq 0$. También podemos argumentar que la transformación $\Phi_0 = id$ tiene obviamente la propiedad $\tilde{x}'' = 0 \Leftrightarrow x'' = 0$ y las funciones componentes de Φ_0 ciertamente satisfacen $g_x \neq 0$ y $h_t \neq 0$. Cualquier topología «razonable» en el conjunto de las transformaciones Φ ha de producirnos toda una vecindad de $\Phi_0 = id$ con transformaciones Φ que satisfacen las mismas condiciones. Luego, las ecuaciones (1) dicen que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_x}{g_x}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_t}{h_t}\right) = 0,$$

de manera que,

$$h_x = a\, g_x \qquad \text{y} \qquad h_t = \varphi\, g_t,$$

siendo a una función de t únicamente y φ una función de x únicamente. En particular, $\partial_x(h - ag) = 0$ y $\partial_t(h - \varphi g) = 0$, de donde resulta que

$h - ag = b$, siendo b una función de t solamente y $h - \varphi g = \psi$, siendo ψ función solamente de x. Se sigue fácilmente que,

$$g = \frac{\psi - b}{a - \varphi} \qquad \text{y} \qquad h = \frac{a\psi - b\varphi}{a - \varphi},$$

y se puede demostrar directamente que,

$$\Delta(J\Phi) = \det \begin{pmatrix} g_x & g_t \\ h_x & h_t \end{pmatrix} = (\varphi - a)\, g_x g_t$$

de manera que $\varphi - a \neq 0$ y $g_t \neq 0$ (además de que ya teníamos $g_x \neq 0$). Finalmente, usando las ecuaciones (2), se puede ver que,

$$\frac{\partial \Delta(J\Phi)}{\partial t} = 3\,(h_t)^2 \left(\frac{1}{\varphi}\right)' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Delta(J\Phi)}{\partial x} = 3\,(g_x)^2 a'.$$

Ejemplo. Las transformaciones de Galileo

Consideraremos el subconjunto de las transformaciones definidas por las condiciones siguientes:

$$h \;\text{ no depende de } x \text{ y} \tag{3}$$

$$h \;\text{ está bien definida para todo } t. \tag{4}$$

En particular (3) dice que $h_x = 0$ y por lo tanto, $a = 0$. Luego,

$$g(x,t) = \frac{b(t) - \psi(x)}{\varphi(x)} \qquad \text{y} \qquad h(x,t) = b(t).$$

Ahora se pueden usar estos resultados en las ecuaciones (2) y demostrar que

$$b\left(\frac{1}{\varphi}\right)'' - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'' = 0, \tag{5}$$

y

$$2\left(\frac{1}{\varphi}\right)'(b')^2 = b''\left(b\left(\frac{1}{\varphi}\right)' - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'\right). \tag{6}$$

Notar que para concluir (5) es preciso usar la invertibilidad de Φ así:

$$\Delta(J\Phi) = b'\left(b\left(\frac{1}{\varphi}\right)' - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'\right) \neq 0.$$

Se puede también probar que la ecuación (5), a su vez conduce a,

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)'' = 0 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'' = 0,$$

(suponer lo contrario y obtener una contradicción). Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = A = \text{ const.} \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = B = \text{ const.}$$

A continuación se puede demostrar que la ecuación (6) se satisface si y sólo si,

$$\frac{d}{dt}\left\{ (b')^{-1}\left(b\left(\frac{1}{\varphi}\right)' - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'\right)\right\} = -\left(\frac{1}{\varphi}\right)'.$$

Resolviendo para b se obtiene que,

$$b(t) = \frac{b(0)\big(Ab(0) - B\big) - b'(0)Bt}{Ab(0) - B - Ab'(0)t}.$$

Notar que si $A \neq 0$, la tranformación $t \mapsto \tilde{t}$ es singular para t igual a,

$$t_{\text{sing}} = \frac{Ab(0) - B}{Ab'(0)} = \frac{b(0) + \psi(0)}{b'(0)} - \frac{\psi'(0)}{b'(0)}\,\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}.$$

Por lo tanto, si $t \mapsto \tilde{t}$ ha de estar bien definida para todo valor de t (condición (4), entonces $A = 0$ y las transformaciones quedan bajo las hipótesis (3) y (4) así:

$$x \mapsto g(x,t) = (\, b'(0)t + b(0) + \psi'(0)x + \psi(0)\,)\,\varphi(0)^{-1} \quad \text{y}$$
$$t \mapsto b(t) = b'(0)t + b(0).$$

Obsérvese que al interpretar a t como el tiempo, la «ley de transformación» $t \mapsto \tilde{t} = b'(0)t + b(0)$ simplemente dice que el observador $\tilde{\mathcal{O}}$ usa una escala diferente a la que usa $\mathcal{O}$ para medir el tiempo $(b'(0))$ y que $\tilde{\mathcal{O}}$ ha fijado su origen temporal en un evento distinto al fijado por $\mathcal{O}$. Se puede argumentar que *todos* los observadores pueden usar, en principio, el mismo patrón para medir el tiempo y que por tanto, las transformaciones posibles son:

$$x \mapsto \tilde{x} = \varphi(0)^{-1}\psi'(0)x + \varphi(0)^{-1}t + \psi(0) + b(0) \;\; \text{y} \;\; t \mapsto \tilde{t} = t + b(0).$$

Pero entonces nuevamente se puede argumentar que todos los observadores pueden, en principio, usar el mismo patrón para medir distancias y que por tanto, las transformaciones posibles son:

$$x \mapsto \tilde{x} = x + \psi'(0)^{-1}t + \psi(0) + b(0) \;\text{ y }\; t \mapsto \tilde{t} = t + b(0).$$

En este momento podemos ya reconocer que el conjunto —en realidad *subgrupo*— formado por las transformaciones de este tipo, depende de tres parámetros reales: $b(0) =: t_0$ que corresponde a una elección de origen temporal; $\psi(0) + b(0) =: x_0$ que corresponde a una elección de origen espacial; $\psi'(0)^{-1} = v$ que es la velocidad con la que $\mathcal{O}$ observa moverse a $\tilde{\mathcal{O}}$. Las ecuaciones de transformación de Galileo pueden entonces escribirse así:

$$\tilde{x} = x + vt + x_0 \qquad \text{y} \qquad \tilde{t} = t + t_0.$$

Ejemplo. Las transformaciones de Lorentz

Hemos llegado a las transformaciones de Galileo tras resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1) y (2) bajo las hipótesis (3) y (4) que simplificaron considerablemente el sistema. Sin embargo, caben otras alternativas. Por ejemplo, se podría pedir que la derivada de Φ,

$$J\Phi = \begin{pmatrix} g_x & g_t \\ h_x & h_t \end{pmatrix},$$

pertenezca al grupo de transformaciones lineales que preservan una forma bilineal $B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Esto es, pedir que,

$$J\Phi \in G_B = \{g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid B(gu, gv) = B(u,v) \text{ para todos } u, v \in \mathbb{R}^2\}.$$

Supongamos por lo pronto que las entradas matriciales de la derivada $J\Phi$, satisfacen las condiciones

$$g_x = h_t \qquad \text{y} \qquad h_x = g_t,$$

(obsérvese el parecido con las condiciones de Cauchy-Riemann de la variable compleja; de hecho éstas últimas serían $g_x = h_t$ y $h_x = -g_t$). El que sean estas condiciones las que se satisfagan dicen que la forma bilineal B que habrá de preservarse es,

$$B\left(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}\right) = x^2 - t^2.$$

En este caso, comenzamos por determinar las funciones a y b de t para las que $h_x = a\,g_x$ y $b = h - a\,g$, así como las funciones φ y ψ de x definidas por las ecuaciones $h_t = \varphi\,g_t$ y $\psi = h - \varphi\,g$, junto con las condiciones adicionales de que $J\Phi$ preserva B (*ie*, $g_x = h_t$ y $h_x = g_t$), que son las condiciones que ahora remplazan a (3) y a (4) de la sección anterior. No es difícil ver que con estas hipótesis ahora se tiene,

$$h_x = a\,g_x = a\,h_t = g_t \qquad \text{y} \qquad h_t = \varphi\,g_t = \varphi\,h_x = g_x.$$

En particular

$$g_x = \varphi\,h_x = \frac{1}{a}\,h_x,$$

y suponiendo esta vez que $h_x \neq 0$, tendremos

$$\varphi = \frac{1}{a} = \text{constante} = \frac{1}{a_0}.$$

Luego,

$$a - \varphi = a_0 - \frac{1}{a_0} = \frac{a_0^2 - 1}{a_0} = \beta_0,$$

y por lo tanto,

$$g = \frac{\psi - b}{\beta_0} \qquad \text{y} \qquad h = \frac{a\psi - b\varphi}{\beta_0} = \frac{a_0^2\psi - b}{a_0\beta_0}.$$

Las ecuaciones $g_x = h_t$ y $h_x = g_t$ conducen ahora ambas a la ecuación,

$$a_0\psi' = -b' = \text{constante } = a_0\psi'(0),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi'(0)\,x + \psi(0), \\ b(t) &= -a_0\psi'(0)\,t + b(0). \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} \tilde{x} = g(x,t) &= \frac{\psi'(0)\,x + a_0\psi'(0)\,t + \psi(0) - b(0)}{\beta_0}, \\ \tilde{t} = h(x,t) &= \frac{a_0\psi'(0)\,x + \psi'(0)\,t + a_0\psi(0) - a_0^{-1}b(0)}{\beta_0}. \end{aligned}$$

Pero éstas no son otra cosa que las transformaciones de Lorentz, o de la teoría de la relatividad, en dos dimensiones. Para verlo, basta identificar las constantes que aparecen en las últimas ecuaciones con los datos usuales y tener en cuenta que la nuestras coordenadas t y $\tilde{t}$ deben ser realmente ct y $c\tilde{t}$, respectivamente. Las fórmulas usuales son:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \gamma\,(x - vt) + x_0, \qquad \text{con} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \tilde{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) + t_0. \end{aligned}$$

Epílogo

Con un enfoque sencillo es posible dar cuenta de los diferentes *grupos de transformaciones* que pueden actuar en un espacio de dimensión dos y cuyas coordenadas podrían interpretarse físicamente como mediciones de espacio y tiempo. La forma de haber planteado aquí el problema está fuertemente inspirada en las enseñanzas de Poincaré —y en lo que aprendí directamente de mi profesor Shlomo Sternberg— tanto desde un punto de vista filosófico, como desde un punto de vista matemático. El que Poincaré haya comprendido la clasificación de las diferentes geometrías bidimensionales *es, de facto,* un fuerte reflejo de la fuerza, de la profundidad y de la trascendencia de sus reflexiones e ideas acerca de la relación entre la geometría y la física.

> . . . La geometría no es una ciencia experimental; la experiencia proporciona únicamente la ocasión para que nosotros reflexionemos sobre las ideas geométricas que pre-existen en nosotros. Pero la ocasión es necesaria; si no existiera, no reflexionaríamos y si nuestras experiencias fueran diferentes, sin duda nuestras reflexiones serían diferentes. El espacio no es una forma de nuestra sensibilidad; es un instrumento que sirve, no para representarnos las cosas, sino para razonar acerca de las cosas [. . .] Por lo tanto, nuestra elección [de geometría del universo] no está impuesta por la experiencia. Sólo está guiada por ella, pero permanece libre; si elegimos tal o cual geometría no lo hacemos porque una sea más *verdadera* que la otra, sino porque una es más *conveniente* que la otra.
>
> . . . Así, decimos que la geometría es el estudio de un conjunto de leyes ligeramente distintas de las que nuestros instrumentos realmente obedecen, pero mucho más simples; leyes que no gobiernan objeto natural alguno, pero que son concebibles por el espíritu humano. En este sentido, la geometría es una convención; una especie de arreglo entre nuestro amor por la simplicidad y nuestro deseo de no apartarnos demasiado de lo que nos enseñan los instrumentos. Esta convención define a la vez el espacio y el instrumento perfecto.

¿Cuál es la geometría del espacio físico en el que vivimos? Hoy sabemos que en el corazón de esta pregunta se encuentra —podríamos decir que genéticamente instalada— la antes llamada *Conjetura de Poincaré* y hoy llamado *Teorema de Perelman*. Sin duda alguna las aportaciones de Poincaré fueron enormes. Tan solo el que haya abordado el tema de la geometría bajo una gran cantidad de preguntas relacionadas con la física y sus mediciones, así como bajo las múltiples reflexiones y posturas filosóficias con que lo hizo, por un lado y, por otro, empleando en todo momento una metodología matemática seria y rigurosa, lo sitúan como uno de los más grandes matemáticos y físicos teóricos de todos los tiempos. Yo, por lo pronto, seguiré encendiéndole mis veladoras a Poincaré para «que me salgan los teoremas».

Apéndice

¿Qué dice Poincaré?

Resumen 1
Tomado de H. Poincaré; *Ciencia e hipótesis.*
Capítulo IX. Las hipótesis en Física

> La experiencia es la única fuente de la verdad. . . . (Aunque) no es suficiente observar; es preciso utilizar las observaciones y para ello es necesario generalizar. [. . .] Contentarnos con la experiencia totalmente desnuda . . . sería desconocer completamente el verdadero carácter de la ciencia . . .
>
> [la experiencia no nos da más que un cierto número de puntos aislados, es preciso reunirlos con un trazo continuo; es ésa una . . . generalización. Pero se hace más, la curva que se trace pasará entre los puntos observados y cerca de esos puntos; no pasará por esos mismos puntos. Así, no nos limitamos a generalizar la experiencia, la corregimos . . .]
>
> [. . .] se hace la ciencia con hechos, . . . (pero) el científico debe ordenar(los) [. . .] y, ante todo, debe prever(los)
>
> . . . sin la generalización, la previsión es imposible. Las circunstancias en que se ha observado no se repetirán jamás todas a la vez; . . . lo único que se puede afirmar es que en circunstancias análogas un hecho análogo se repetirá. Entonces, para prever es preciso, al menos, invocar la analogía, es decir, generalizar. . . . Gracias a la generalización, cada hecho observado nos permite prever otros en gran número. (Pero,) por más sólidamente asentada que pueda parecernos una previsión no estamos jamás absolutamente seguros de que la experiencia no la desmentirá, si nos proponemos verificarla. . . . No se debe, pues, desdeñar jamás hacer una verificación cuando se presente la ocasión. Pero toda expe-

riencia es larga y difícil. De lo poco que podamos alcanzar directamente es preciso sacar el mejor partido; es necesario . . . aumentar el rendimiento de la máquina científica.

[hay buenas y malas experiencias. Éstas se acumularon en vano. . . . Un único trabajo de un maestro verdadero, . . . bastará para hacerlas caer en el olvido. . . . Una buena experiencia . . . es la que nos hace conocer algo más que un hecho aislado, . . . (la) que nos permite prever, . . . la que nos permite generalizar.]

IX.2. La unidad de la naturaleza

Toda generalización supone . . . creencia en la unidad y en la simplicidad de la naturaleza. (En la unidad, porque ¿qué) resultaría si las distintas partes del universo no fueran como los órganos de un mismo cuerpo? . . . (En cuanto a la simplicidad,) toda ley es considerada simple hasta que se demuestre lo contrario.

¿Cómo justificar la simplicidad en presencia de descubrimientos que nos muestran cada dia detalles más ricos y más complejos? ¿Cómo conciliar la unidad y la simplicidad? Para que la ciencia sea posible, es necesario detenerse cuando se ha encontrado la simplicidad. Es ése el único terreno sobre el que podemos elevar el edificio de nuestras generalizaciones. . . . Si una ley simple ha sido observada en muchos casos particulares, podemos suponer legítimamente que será también cierta en los casos análogos. Rehusarnos a ello sería atribuir al azar un papel inadmisible.

IX.3. Función de la hipótesis

Toda generalización es una hipótesis; tiene por lo tanto, una función necesaria que nadie ha discutido jamás. Solamente que ella debe ser sometida a la verificación, lo más rápido y lo más frecuentemente posible. . . . Si no soporta esa prueba, se debe abandonar sin reservas.

[. . . el físico que acaba de renunciar a una de sus hipótesis debería estar . . . pleno de gozo, pues acaba de encontrar una inesperada ocasión de descubrimiento. . . . (Si su hipótesis no se confirma) es porque hay algo (inesperadamente) . . . extraordinario; es lo que se va a encontrar de desconocido y de nuevo.]

El firme propósito de someterse a la experiencia no basta; hay todavía hipótesis peligrosas. Son, en primer lugar y sobre todo, las que son tácitas e inconscientes. Puesto que las hacemos sin saber, somos impotentes para abandonarlas. Se trata de un servicio que todavía nos puede prestar la física matemática. Por la precisión que le es propia, nos obliga a formular todas las hipótesis que haríamos sin ella, pero sin dudar por ello.

. . . Por otra parte, . . . importa (mucho) no multiplicar desmedidamente las hipótesis y no hacerlas más que una después de otra. ¿Si construimos una teoría fundada sobre hipótesis múltiples y si la experiencia la condena, cuál es entre nuestras premisas la que es necesario cambiar? e inversamente ¿si la experiencia tiene éxito se creerá haber verificado todas esas hipótesis a la vez?

IX.4. Origen de la física matemática

No basta que cada fenómeno elemental obedezca a leyes simples; es necesario que todos aquellos que se han de combinar obedezcan a la misma ley. Sólo entonces la intervención de la matemática puede ser útil; ellas nos enseñan a combinar lo semejante. Su propósito es prever el resultado de una combinación, sin tener necesidad de rehacer esa combinación paso a paso. Si se tiene que repetir muchas veces una operación, las matemáticas nos permiten evitar esa repetición haciéndonos conocer de antemano el resultado, por una especie de inducción.

Resumen 2
Tomado de H. Poincaré; *El valor de la ciencia.*
XI.2. Objetividad de la ciencia

Lo que nos garantiza la objetividad del mundo en que vivimos es que ese mundo nos es común con otros seres pensantes. Por el contacto que tenemos con los otros hombres, recibimos de ellos razonamientos totalmente hechos; sabemos que esos razonamientos no son nuestros y, al mismo tiempo, reconocemos allí la obra de seres racionales como nosotros. Y como esos razonamientos parecen aplicarse al mundo de nuestras sensaciones, creemos poder concluir que esos seres racionales han visto lo mismo que nosotros; así sabemos que no hemos tenido un sueño.

Tal es, pues, la primera condición de la objetividad; lo que es objetivo debe ser común a muchos espíritus y, por consiguiente, se debe transmitir de uno a otro, ...

(Sin embargo) las sensaciones de otra persona serán un mundo eternamente cerrado para nosotros. No tenemos ningún medio para verificar que la sensación que llamo roja, sea igual a la que mi vecino llama roja. ... Las sensaciones son ... intransmisibles o, más bien, todo lo que en ellas es cualidad pura es intransmisible ... Desde este punto de vista, lo que es objetivo está desprovisto de toda cualidad y no es más que la relación pura.

[Supongamos que una cereza y una amapola producen en mi la sensación A y en él la sensación B, ..., podremos comprobar que, tanto para él como para mi, la cereza y la amapola producen la misma sensación, puesto que él da el mismo nombre a las sensaciones que experimenta y yo hago lo mismo.]

Al mismo tiempo ... debemos admitir ... que nada que no sea transmisible es objetivo y que, en consecuencia, sólo las relaciones entre las sensaciones pueden tener un valor objetivo ... No es objetivo nada más que lo idéntico para todos; ahora bien, no se puede hablar de una identidad semejante más que si es posible una comparación y puede ser convertida en una «moneda de canje» que pueda transmitirse de un espíritu a otro. No tendrá, pues, valor objetivo, nada más que lo que sea transmisible por el «discurso», es decir, lo inteligible. Pero eso no es más que una parte de la cuestión. Un conjunto absolutamente desordenado no podría tener valor objetivo, puesto que sería ininteligible, pero un conjunto ordenado puede no tener tampoco ninguno, si no corresponde a sensaciones efectivamente experimentadas.

En resumen, la única realidad objetiva son las relaciones entre las cosas, de las que resulta la armonía universal. Sin duda, esas relaciones, esa armonía, no podrán ser concebidas fuera de un espíritu que las conciba y que las sienta. Pero, sin embargo, son objetivas porque son, llegarán a serlo o permanecerán comunes a todos los seres pensantes.

¿Qué es la ciencia? ... es, en primer lugar, una clasificación,

> un modo de relacionar hechos que las apariencias separan, aunque estén ligados por un parentesco natural y oculto. En otros términos, la ciencia es un sistema de relaciones. Ahora bien, … solamente en las relaciones debe ser buscada la objetividad; sería en vano buscarla en los seres considerados como aislados unos de otros … (Luego,) cuando preguntamos cuál es el valor objetivo de la ciencia, … no quiere decir, '¿nos hace conocer la ciencia la verdadera naturaleza de las cosas?', sino '¿nos hace conocer las verdaderas relaciones de las cosas?' … A la primera pregunta nadie dudaría en responder que no, pero se puede ir mas lejos; no solamente es que la ciencia no nos pueda hacer conocer la naturaleza de las cosas, sino que nada es capaz de hacérnosla conocer, … (En cuanto a la segunda pregunta, cabe abundar:) ¿Tienen un valor objetivo esas relaciones? Esto quiere decir: (¿serán) las mismas para los que vengan después de nosotros? … Sin duda muchas de las relaciones que se creían bien establecidas, han sido abandonadas, pero en su mayoría subsisten y parece que deben subsistir. Entonces, ¿cuál es para ellas la medida de su objetividad? … Es precisamente la misma que para (nosotros la) creencia en los objetos exteriores. Estos últimos son reales, porque las sensaciones que nos hacen experimentar aparecen unidas entre sí por … (un) cemento indestructible, y no por el azar de un dia. Del mismo modo, la ciencia nos revela otros vínculos más tenues pero no menos sólidos entre los fenómenos, … (y) desde que se los ha observado, ya no hay manera de no verlos.

Agradecimientos

Primeramente agradezco la hospitalidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autńoma Metropolitana de Iztapalapa donde este artículo fues escrito en su totalidad. Agradezco al Comité Editorial de la Miscelánea Matemática por la invitación que me hizo a través del Dr. Luis Hernández Lamoneda para escribir este artículo. Agradezco muy especialmente la retroalimentación que recibí de parte de la Dra. Elena Vázquez Abal al leer las versiones preliminares del artículo. Finalmente agradezco los apooyos recibidos por parte del CONACYT (MB1411 Proyecto 106923), de la UAM y del CIMAT y que hicieron posible mi estancia sabática.

Bibliografía

1. K. Brown, *Reflections on Relativity*, Lulu.com, Raleigh, N.C., 2011.
2. I. Kant, *Crítica de la razón pura*, Taurus Ediciones, México, 2006.
3. H. Poincaré, «A propos de la Théorie de M. Larmor"», *L'Èclairage électrique*, vol. 5, 1895, 5–14.
4. ———, «La théorie de Lorentz et le principe de réaction», *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, vol. 5, 1900, 252–278.
5. ———, «Les relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique, Reproducido en Ciencia e Hipótesis (Capítulos 9 y 10)», *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 11, 1900, .
6. ———, «Sur les principes de la mécanique, Reproducido en Ciencia e Hipótesis (Capítulos 6 y 7)», *Bibliothèque du Congrès international de philosophie*, 1901, .
7. ———, «The Principles of Mathematical Physics, Congress of arts and science, Universal Exposition, St. Louis», *Houghton, Mifflin and Company*, 1904, 604–622.
8. ———, *Ciencia e hipótesis*, Espasa-Calpe, colección austral, Madrid, 1963.
9. ———, *Ciencia y método*, Espasa Calpe, Madrid, 1965.
10. S. Sinha, «Poincaré and the Special Theory of Relativity», *Resonance*, vol. 5, 2000, 12–15.
11. S. Sternberg, «Imagery in scientific thought by A. Miller (book review)», *The mathematical intelligencer*, vol. 8, 1986, 65–74.