Breves comentarios sobre las ecuaciones de Maxwell para los estudiantes de cálculo de Luis

asv@cimat; May 20, 2011

1. Preliminares

Lema. Sea φ una función escalar definida en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{A}$ un campo vectorial definido en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Entonces,

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Además, bajo hipótesis adecuadas,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad \exists\, \varphi \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad \exists\, \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Definición. Para cualquier función escalar φ definida en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, *el Laplaciano de* φ se define como,

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi.$$

En particular, si $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\quad \nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_1, \nabla^2 A_2, \nabla^2 A_3)$.

Lema. $\quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$.

Teorema (descomposición de Helmholtz). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Bajo hipótesis adecuadas, existen, un campo vectorial $\mathbf{A}$, y una función escalar φ, tales que

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}$$

En particular,

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times (\nabla\varphi) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla \cdot \nabla\varphi + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2\varphi.$$

Observación. Estamos interesados en resolver el siguiente problema:

$$\text{Dadas} \qquad \rho := \nabla \cdot \mathbf{F} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{H} := \nabla \times \mathbf{F},$$

determinar φ y $\mathbf{A}$, que satisfagan

$$\nabla^2\varphi = -\rho, \qquad \text{y} \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mathbf{H},$$

para concluir, como en el teorema de la descomposición de Helmholtz que,

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}.$$

El primer paso en la solución de este problema consiste en notar que uno puede escoger $\mathbf{A}$ de tal manera que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones a resolver son todas del mismo tipo:

$$\nabla^2\varphi = -\rho, \qquad \text{y} \qquad \nabla^2\mathbf{A} = -\mathbf{H}.$$

Ejercicio: Responder por qué podemos suponer que $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. Suponer que $\nabla\cdot\mathbf{A}=f\neq 0$. Considerar $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi$, con ψ *arbitraria*. Luego, $\nabla\times\mathbf{A}'=\nabla\times\mathbf{A}$ y por lo tanto, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ contribuyen de la misma manera a $\mathbf{F}$. Sin embargo, podemos escoger ψ de tal manera que $0=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla^2\psi$. Esto se puede hacer si sabemos cómo resolver la ecuación $\nabla^2\psi=-f$ para una f dada. Luego, todo queda reducido al mismo problema:

Moraleja. Conociendo $\nabla\cdot\mathbf{F}$, y $\nabla\times\mathbf{F}$ uno obtiene un sistema de EDP's para φ y $\mathbf{A}$ que se puede resolver si sabemos encontrar la función ψ en la *ecuación de Poisson,*

$$\nabla^2\psi=-f$$

para una función dada f.

2. ¿Cómo resolver la eacuación de Poisson?

Sea $\mathbf{A}$ un campo vectorial definido en un subconjunto abierto of $\mathbb{R}^3$. Bajo hipótesis adecuadas, el teorema de la divergencia dice que,

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=\int_{S=\partial V}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Sea $\mathbf{A}=\phi\,\nabla\psi$, de manera que $\nabla\cdot\mathbf{A}=\phi\,\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi$, y $\phi\,\nabla\psi\cdot\mathbf{n}=\phi\,\partial_{\mathbf{n}}\psi$. Por lo tanto,

$$\int_V\left(\phi\,\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\,dV=\int_{S=\partial V}\phi\,\partial_{\mathbf{n}}\psi\,dS.$$

Podemos intercambiar los roles de ϕ y ψ, obtener una ecuación similar, y luego restar una de la otra para concluir que,

$$\int_V\left(\phi\,\nabla^2\psi-\psi\,\nabla^2\phi\right)\,dV=\int_{S=\partial V}\left(\phi\,\partial_{\mathbf{n}}\psi-\psi\,\partial_{\mathbf{n}}\phi\right)\,dS$$

Esta relación se llama *la segunda identidad de Green.* Elíjase ahora una ψ particular; a saber,

$$\psi(x)=\frac{1}{||x-y||}$$

y demuéstrese el siguiente resultado:

Lema.

$$\int_{y\in V}\left(\phi(y)\nabla^2\left(\frac{1}{||x-y||}\right)\right)\,dV=-4\pi\phi(x).$$

Finalmente, elíjase una ϕ que satisfaga $\nabla^2\phi=-4\pi\rho$ para una ρ dada. Luego, la identidad de Green permite concluir (con $S=\partial V$) que,

$$-4\pi\phi(x)+4\pi\int_{y\in V}\frac{\rho(y)}{||x-y||}\,dV=\int_{y\in S}\left(\phi(y)\partial_{\mathbf{n}}\left(\frac{1}{||x-y||}\right)-\frac{1}{||x-y||}(\partial_{\mathbf{n}}\phi)(y)\right)\,dS$$

Esto es,

$$\phi(x) = \int_{y\in V} \frac{\rho(y)}{||x-y||}\, dV - \frac{1}{4\pi}\int_{y\in S}\left(\phi(y)\partial_{\mathbf{n}}\left(\frac{1}{||x-y||}\right) - \frac{1}{||x-y||}(\partial_{\mathbf{n}}\phi)(y)\right) dS$$

Si $V = \mathbb{R}^3$ y bajo las suposiciones de que ϕ y $\nabla\phi$ decaen adecuadamente en infinito, uno obtiene que,

$$\phi(x) = \int_{y\in V} \frac{\rho(y)}{||x-y||}\, dV, \qquad \text{siempre que} \qquad \nabla^2\phi = -4\pi\rho.$$

3. Relevancia de la función $x \mapsto \dfrac{1}{||x-y||}$

Es un hecho experimental que la fuerza eléctrica entre dos partículas con cargas q_x y q_y, respectivamente situadas en los puntos x y y del espacio, está dada por,

$$\mathbf{F} = k\, q_x q_y \,\frac{x-y}{||x-y||^3} = \frac{k\, q_x q_y}{||x-y||^2}\,\frac{x-y}{||x-y||},$$

siendo k una constante que depende de las unidades físicas de medida (y uno puede elegir un sistema de unidades en el que $k=1$). El *campo eléctrico* en el punto x producido por una carga puntual q_y situada en el punto $y \in \mathbb{R}^3$, se define como,

$$\mathbf{E}(x) = q_y\,\frac{x-y}{||x-y||^3}.$$

Si hay varias cargas q_{y_i}, el campo está dado por,

$$\mathbf{E}(x) = \sum_i q_{y_i}\,\frac{x-y_i}{||x-y_i||^3},$$

mientras que si hay una distribución continua de carga descrita por la función de *densidad* $y \mapsto \rho(y)$ definida en un subconjunto cerrado $V \subset \mathbb{R}^3$, el campo está dado por,

$$\mathbf{E}(x) = \int_V \rho(y)\,\frac{x-y}{||x-y||^3}\, dV.$$

Observar que al considerar y como un punto fijo dado, se tiene,

$$\nabla\left(\frac{1}{||x-y||}\right) = -\frac{x-y}{||x-y||^3}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla\left(\int_V \frac{\rho(y)}{||x-y||}\, dV\right).$$

Esto es,

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla\varphi\,(x), \qquad \text{where,} \qquad \varphi(x) = \int_V \frac{\rho(y)}{||x-y||}\, dV.$$

De acuerdo al teorema de descomposición de Helmholtz, aparentemente no necesitaríamos usar aquí $\mathbf{A}$ (aparentemente $\nabla\times\mathbf{E}=0$). Además, empleando el resultado del último Lema en §1, se sigue que,

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x)=4\pi\,\rho(x).$$

Hay razones físicas y geométricas para esperar este resultado y convencerse de su veracidad. Por un lado, usando el teorema de la divergencia se tiene que,

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dV=\int_{S=\partial V}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

El lado derecho se puede calcular explícitamente para una partícula cargada (puntual), para un sistema de partículas cargadas, o en general para una distribución continua de cargas encerradas dentro de $S=\partial V$. En cualquier caso uno concluye nuevamente (bajo las interpretaciones adecuadas) que,

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x)=4\pi\,\rho(x).$$

4. Las ecuaciones de Maxwell

Del libro de J.D. Jackson (*Classical Electrodynamics,* página 2): "Las ecuaciones que gobiernan los fenómenos electromagnéticos son *las ecuaciones de Maxwell,* que con fuentes en el vacío están dadas por,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}&=4\pi\,\rho\\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}&=0\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0\\ \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}&=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}\end{aligned}$$

Implícita en las ecuaciones de Maxwell está la *ecuación de continuidad* para densidades de carga y corriente,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$$

Ésta se sigue de combinar la derivada temporal de la primera ecuación con la divergencia de la tercera. También es esencial para la descripción del movimiento de una pertícula cargada, la ecuación de Lorentz,

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

que da la fuerza que actúa sobre una partícula puntual de carga q en presencia de campos electromagnéticos."

Una breve discusión. Las ecuaciones de Maxwell unifican y explican bajo una misma teoría lo que en algún tiempo se consideraron fenómenos físicos de naturaleza diferente: electricidad, magnetismo y óptica. Este es un conjunto de EDP's que se debe resolver para las funciones $(x,t) \mapsto \mathbf{E}(x,t)$ y $(x,t) \mapsto \mathbf{B}(x,t)$ con valores en $\mathbb{R}^3$ cuando se dan las *fuentes* que producen los campos eléctrico y magnético; a saber, las funciones ρ (densidad de carga) y $\mathbf{J}$ (densidad de corriente). Además, existe un amplio conjunto de transformaciones que se pueden practicar en el conjunto de variables y ecuaciones, que preserva la forma de estas ecuaciones. En particular, el conjunto de transformaciones que preserva las ecuaciones *sin fuentes* (ie, cuando ρ y $\mathbf{J} = 0$), depende de 15 parámetros reales y se cierra adecuadamente bajo una ley de composición de grupo que lo hace localmente isomorfo al grupo $\mathrm{SU}(2,2)$. Es de destacarse que este grupo incuye de manera natural al grupo de Poincaré de dimensión 10, que a su vez es el producto semidirecto del grupo de Lorentz de dimensión 6 de la teoría especial de la relatividad de Einstein, con el grupo de translaciones en el espaciotiempo de Minkowski de dimensión 4. Así, las ecuaciones de Maxwell son relativistas desde sus fundamentos. Las ecuaciones se pueden resolver más o menos fácilmente bajo suposiciones especiales; por ejemplo, cuando *no hay fuentes y son independientes del tiempo,* cuando solamente son *independientes del tiempo,* o cuando solamente *no hay fuentes.* En el caso independiente del tiempo, las ecuaciones se desacoplan para los campos eléctrico y magnético. En el caso dependiente del tiempo, las soluciones $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dependen una de la otra, *aún cuando no hay fuentes,* dando lugar a *ondas electromagnéticas;* ie, *luz.*

5. Una enfoque hacia la solución de las ecuaciones de Maxwell

De la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se puede concluir, bajo hipótesis apropiadas, que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

para algún *potencial vectorial* $\mathbf{A}$. Luego, la ecuación para $\nabla \times \mathbf{E}$ dice que,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

de manera que podemos concluir, bajo hipótesis adecuadas, que,

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

para algún *potencial escalar* φ. Por lo tanto, las dos ecuaciones restantes se pueden reescribir en términos de φ y $\mathbf{A}$ como,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\, \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c}\, \mathbf{J} \end{aligned}$$

Ahora bien, siempre podemos suponer que,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

puesto que podemos aplicar la siguiente *transformación de gauge*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \qquad \text{y} \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

de manera que las ecuaciones a resolver para φ y $\mathbf{A}$ son todas de la misma forma; a saber,

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\,\rho$$
$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}$$

siempre que,

$$\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0.$$

Así, podremos resolver para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, siempre que sepamos resolver la *ecuación de onda,*

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f$$

para una fuente dada f.

Observación. Así como en el caso de la ecuación de Poisson, la ecuación de onda con fuentes siempre se puede resolver bajo hipótesis apropiadas. Sin embargo, eso no lo demostraremos aquí.

6. Forma integral de las ecuaciones de Maxwell

Usando los teoremoas del rotacional y de la divergencia se puede comprobar fácilmente que las ecuaciones de Maxwell con fuentes en el vacío son equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones,

$$\int_{S=\partial V} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = 4\pi\int_V \rho\,dV$$
$$\int_{\Gamma=\partial S} \mathbf{E}\cdot d\Gamma = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$$
$$\int_{S=\partial V} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$
$$\int_{\Gamma=\partial S} \mathbf{B}\cdot\Gamma = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,ds + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

que son las que por lo regular reciben interpretaciones físicas en términos de *flujos* (integrales de superficie) y *circulaciones* (integrales de linea).

7. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell en el espacio tiempo 4-dimensional

8. Sobre el grupo de simetrías que preservan las ecuaciones de Maxwell en el vacío