INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DE LOS GRUPOS DE LIE

Ricardo Berlanga Zubiaga
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo 1, Tizapán CP04500; México, D.F.
E-mail: berlanga@gauss.rhon.itam.mx

Luís Hernández Lamoneda
Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, CP36000; Guanajuato, Gto. México
E-mail: lamoneda@fractal.cimat.mx

Adolfo Sánchez Valenzuela
Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal 402, CP36000; Guanajuato, Gto. México
E-mail: adolfo@fractal.cimat.mx

A nuestras queridas mujeres: Patricia, Maritza y Tatiana

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

PROLOGO Y ADVERTENCIA

Estas notas fueron el texto base de los cursos *Introducción a los Grupos de Lie* y *Geometría de Grupos de Lie* impartidos en el Centro de Investigación en Matemáticas durante el IV Taller de Verano en Sistemas Dinámicos que tuvo lugar entre los días 7 y 18 de julio de 1997. Cada curso tuvo una duración aproximada de diez horas de pizarrón. El primero fué dictado por ASV entre los días 7 y 11 y el segundo por LHL del 14 al 18. Ambos cursos fueron concebidos como la unidad que ahora presentamos bajo un solo título. En el curso se partió del supuesto que la audiencia no tenía experiencia alguna en el tema. El objetivo perseguido era exponer algunos problemas geométricos típicos (como por ejemplo, describir las geodésicas del plano hiperbólico, o calcular la curvatura del espacio proyectivo complejo) partiendo desde una plataforma de álgebra lineal, cálculo y topología elemental únicamente. Se pretendía, más que dar un resumen concentrado de resultados, proporcionar a la audiencia una "idea activa" de los métodos de la geometría diferencial a través de una exposición, tan autocontenida como fuera posible, llena de ejemplos ilustrativos para ser trabajados en su mayoría como ejercicios.

Una "condición a la frontera" impuesta por los organizadores del Taller de Sistemas Dinámicos para poder ofertar un curso durante dicho evento fué la de producir por escrito (¡y por adelantado!) el material del curso en cuestión. En las palabras de los organizadores, debía ser "un material que no representara un esfuerzo mayor al de leer más de seis o siete páginas al día para poder seguir provechosamente la exposición". Esto impuso sobre los expositores una variable adicional: una cosa es hablar para una audiencia y otra muy diferente es escribir para un lector. Y a pesar de que los lectores inmediatos eran precisamente los miembros de la audiencia que estaba limitada al período de dos semanas, el sólo hecho de ofrecerles un material escrito los convierte en sujetos libres de las estrechas y rígidas fronteras temporales marcadas por la duración del Taller. Igualmente, una vez concluído el compromiso de exponer ante la audiencia, los expositores se convierten en autores de un documento escrito que, idealmente, debería poder trascender las mencionadas fronteras temporales para que de verdad haya valido la pena el esfuerzo de producir las notas del curso.

Hubo entonces que tomar algunas "decisiones prácticas" para enfrentar el reto: uno de los expositores (ASV) rápidamente echó mano de la monografía (¡aún inconclusa!) *Panoramas de la Teoría de grupos de Lie aplicada a las ecuaciones diferenciales de la geometría y de la física*, que había estado preparando desde hace algún tiempo con uno de los otros dos autores (RBZ). De hecho, a base de una sucesión de instrucciones *cut-paste*, realizada sobre los archivos fuente de la monografía citada (aunque aún un poco lejos de ser publicada), se obtuvo una "decente" versión de la primera parte de estas notas. Cabe señalar que también fueron "aprovechados" con la misma metodología — aunque en menor proporción — los trabajos de algunos estudiantes del tercer autor: principalmente *Sobre la clasificación de las álgebras de Lie semisimples* de R. Peniche, *Sobre la topología de los grupos de Lie compactos* de J.P. Navarrete, *Div, Grad, Gurl, and all that, según Lie* de E. Duéñez y el trabajo final del curso *Supervariedades*

I de M.A. Méndez, J.P. Navarrete, A. Ortega y R. Peniche. Queda intacta, sin embargo, la firme intención de terminar de escribir la monografía "asaltada" sobre ecuaciones diferenciales. Por su parte, el segundo autor (LHL) echó mano de sus apuntes personales y de los ejercicios de los cursos de geometría en los que había participado — ya fuera como profesor o como alumno — poniéndose a resolver y TeX-er todos sus "problemas didácticos favoritos" tendientes a proporcionar la deseada "introducción activa" a la Teoría de los Espacios Simétricos.

El resultado final es que, a pesar de sus desaliñados inicios, el material que aquí se presenta ha pasado ya por una serie de filtros impuestos por los autores mismos con la mejor intención de producir unas notas duraderas y aprovechables en futuros cursos. El material ha quedado dividido en dos partes que corresponden más o menos a la división original definida por los dos cursos del taller: los fundamentos (algebraicos y analíticos) de la teoría de grupos de Lie y las construcciones geométricas (en grupos de Lie y algunos espacios homogéneos). Esperamos sincera y profundamente que este trabajo efectivamente trascienda a las fronteras del curso impartido en el verano de 1997. La mejor recomendación para los participantes de aquél memorable Taller, una vez dueños de su propio tiempo, es que estudien el material aquí expuesto procurando seguir muy de cerca también las dos principales referencias del tema: los libros de Sigurdur Helgason [He] y de Albert Besse [Be]. Finalmente, esperamos también que quienquiera que tenga que hacer la recensión para los *Mathematical Reviews* no reporte sin explicación adicional alguna que *this piece of work is just a spanish translation of certain parts of the books by Helgason and Besse*.

Los autores. Guanajuato; enero de 1998.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

Definiciones Elementales e Introducción a los Grupos de Lie

1. GRUPOS Y ACCIONES

1.1 Grupos y homomorfismos.

1. Definiciones. Un *grupo* es un conjunto G con una operación binaria $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, que verifica:

(a) la *propiedad asociativa* $(gh)k = g(hk)$,

(b) la *existencia de un elemento idéntico* $e \in G$, tal que, para cada $g \in G$, $eg = g = ge$ y

(c) la *existencia de un inverso* $g^{-1} \in G$ para cada $g \in G$, tal que $g\, g^{-1} = e = g^{-1}g$.

Sean G y G' dos grupos. Un *homomorfismo* de G en G' es una función $\psi: G \to G'$, que verfica: $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$. Se sigue fácilmente que $\psi(e) = e'$ y que $\psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1}$.

2. Ejemplo universal. Dado un conjunto arbitrario X, el conjunto

$$\mathcal{S}(X) = \{\Phi: X \to X \mid \ \Phi \text{ es invertible } \}$$

es un *grupo* frente la composición de funciones. Lo usual es llamar al grupo $\mathcal{S}(X)$, el *grupo de permutaciones* del conjunto X, o el *grupo de simetría* del conjunto X.

La “universalidad” de este ejemplo radica en la siguiente observación — conocida como el Teorema de Cayley (*cf.* [Ja]): *para cada grupo G, existe un conjunto X y un homomorfismo inyectivo de grupos $\psi: G \to \mathcal{S}(X)$.* El lector puede dar una demostración directa de esta afirmación considerando el conjunto $X = G$ y la aplicación $G \ni g \mapsto \ell(g) \in \mathcal{S}(G)$, con $\ell(g)(h) = gh$.

1.2 Acción de un grupo.

1. Definición. Una *acción* (por la izquierda) de un grupo G en un conjunto X es una función $\Psi: G \times X \to X$ que verifica las siguientes propiedades:

(a) $\Psi(e, x) = x$, para todo $x \in X$; $e \in G$ el elemento idéntico y,

(b) $\Psi\big(g, \Psi(h, x)\big) = \Psi(gh, x)$, con g, $h \in G$ y $x \in X$.

Obsérvese que el grupo $\mathcal{S}(X)$ actúa en el conjunto X bajo $\Psi\colon \mathcal{S}(X) \times X \to X$, $(\Phi, x) \mapsto \Phi(x)$. Obsérvese también que definir una accion de G en X es equivalente a definir un homomorfismo de grupos $G \to \mathcal{S}(X)$.

2. Nota. Análogamente, una acción (por la derecha) de un grupo G en un conjunto X es una función $\Phi\colon X \times G \to X$ que verifica $\Phi(x, e) = x$, para todo $x \in X$ y $\Phi\big(\Phi(x, g), h\big) = \Phi(x, gh)$, para todo x en X y para todos g y h en G. El lector comprobará fácilmente que si Φ es una acción de G por la derecha en X, entonces $\Psi(g, x) := \Phi(x, g^{-1})$ define una acción de G por la izquierda en X.

1.3 Descomposición en órbitas.

Sea $\Psi\colon G \times X \to X$ una acción de G en un conjunto X. La *órbita* del elemento $x \in X$ bajo la acción Ψ, es el subconjunto $G \cdot x = \{\Psi(g, x) \in X \mid g \in G\}$.

1. Observación. Nótese cómo una acción de G en X *descompone* a X en la unión ajena de sus diferentes órbitas: dos puntos son equivalentes si *están en la misma órbita*. El conjunto de todas las órbitas de la acción se denota por X/G. Luego, existe una proyección natural $\pi\colon X \to X/G$. Una *sección* de dicha proyección es una función $X/G \to X$ que asocia, a cada órbita, un elemento sobre ella (*i.e.,* un *representante* o *forma canónica*).

2. Un ejemplo del álgebra lineal. Sea V un espacio vectorial. (**Convención:** Todos los espacios vectoriales que aparecen en estas notas son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ y siempre son de dimensión finita). Luego, V es un grupo bajo la suma de vectores. Sea $W \subset V$ un subespacio. En particular, W mismo es un grupo (bajo la suma) y actúa en V por translaciones:

$$\Psi : V \times W \to V \qquad (v, w) \mapsto v + w.$$

Las órbitas de esta acción son simplemente los subconjuntos de V que resultan de transladar el subespacio W a los distintos puntos de V (observar que hemos escrito la acción por la derecha y la acción del grupo $G = W$ en el conjunto $X = V$ es la suma de vectores):

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\} = \text{ órbita de } v \in V.$$

El conjunto de órbitas — V/W según la notación sugerida — es la unión ajena de todos los subconjuntos en V que son transladados de W. La proyección canónica $V \to V/W$ asocia, a cada punto $v \in V$, el subconjunto $v + W$. Observar que si $U \subset V$ es un subespacio complementario a W en V, entonces se define una sección $\sigma_U\colon V/W \to V$ de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} U \text{ complementario a } W \quad \Longrightarrow \quad V = U \oplus W \\ \Longrightarrow \quad \forall v \in V, \ \ \exists! \ \ u \in U \text{ y } w \in W \text{ tales que,} \quad v = u + w \\ \Longrightarrow \ u \in v + W. \quad \text{Luego,} \quad \sigma_U(v + W) = u. \end{gathered}$$

3. Ejercicio. El lector recordará que el conjunto de órbitas V/W admite una estructura de espacio vectorial y comprobará fácilmente que, el conjunto de secciones *lineales* $V/W \to V$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de subespacios complementarios a W en V

1.4 Isotropía.

1. Definición. Sea $\Psi\colon G \times X \to X$ una acción de G en un conjunto X y sea $x_0 \in X$ un punto dado. El *grupo de isotropía en* x_0 de la acción Ψ, es el subgrupo de G definido por $G_{x_0} = \{g \in G \mid \Psi(g, x_0) = x_0\}$.

2.Observación. Para cada punto $x_0 \in X$, la acción Ψ define una función suprayectiva de G a la órbita de x_0, mediante $G \ni g \mapsto \Psi(g, x_0) \in G \cdot x_0$. Esto a su vez, define una relación de equivalencia en G: los elementos g_1 y g_2 del grupo son equivalentes si y sólo si, $\Psi(g_1, x_0) = \Psi(g_2, x_0)$, lo cual es el caso si y sólo si ${g_1}^{-1}g_2 \in G_{x_0}$. El conjunto de clases de equivalencia en G definidas por esta relación se denota por G/G_{x_0}. Los elementos de este conjunto se llaman *clases laterales* (por la derecha) (módulo el subgrupo G_{x_0}). En general, dado *cualquier subgrupo* $H \subset G$, se define la relación de equivalencia en G: $g_1 \sim g_2 \iff {g_1}^{-1}g_2 \in H$. El lector podrá verificar que dicha relación de equivalencia es la misma que se obtiene al considerar la acción (¡por la derecha!) del grupo H en $X = G$ definida al multiplicar por los elementos de H [*i.e.,* $G \times H \ni (g, h) \mapsto gh \in G$]. Esto generaliza el ejemplo anterior en el que $G = V$ y $H = W$.

3. Ejercicio. Hacer ver que hay una correspondencia biyectiva,

$$G/G_{x_0} \quad \longleftrightarrow \quad G \cdot x_0 \ .$$

Además, escribiendo $[g_0] = \{g_0 h \mid h \in G_{x_0}\} \in G/G_{x_0}$, demostrar que la acción natural,

$$\begin{aligned} \Theta\colon G \times G/G_{x_0} &\to G/G_{x_0} \\ (g, [g_0]) &\mapsto [g\, g_0] \ . \end{aligned}$$

se corresponde precisamente con la restricción de la acción Ψ a la órbita $G \cdot x_0$. Obsérvese que hay dos casos extremos: (1) Cuando G *actúa trivialmente* en X; es decir, cuando $\Psi(g, x) = x$ para todos $g \in G$ y $x \in X$ y (2) Cuando G *actúa transitivamente* en X; es decir, cuando para cualesquiera x y x' en X, existe un $g \in G$, tal que $\Psi(g, x) = x'$. En el primer caso, hay tantas órbitas como elementos en X. En el segundo caso, existe solamente una órbita y aunque X/G no resulta interesante, la correspondencia $G/G_{x_0} \leftrightarrow G \cdot x_0$ reduce el estudio de la acción original Ψ de G en X, al estudio de un problema esencialmente algebraico: el de la acción Θ de G en G/G_{x_0}. Este hecho es fundamental.

4. Ejercicio. El lector podrá comprobar que si G actúa en X y x_0 y x_1 son dos puntos que están sobre la misma órbita, entonces, G_{x_0} *es conjugado* a G_{x_1} en G; es decir, que existe un elemento $g \in G$, tal que $g\, G_{x_0} g^{-1} = G_{x_1}$.

1.5 Subgrupos y simetría en álgebra lineal.

Supondremos que X es un espacio vectorial específico. Cambiaremos entonces la notación y escribiremos V en lugar de X. Cuando el conjunto donde tiene lugar la acción de G posee una estructura adicional (como es el caso de un espacio vectorial V), es natural restringir la atención a aquellas acciones que preservan dicha estructura. Supondremos entonces que G actúa en V por transformaciones lineales. Es decir, que el homomorfismo $G \to \mathcal{S}(V)$ que da lugar a la acción, realmente tiene su imagen en el subgrupo $\mathrm{GL}(V)$ de *transformaciones lineales invertibles* de V:

$$\mathrm{GL}(V) = \{g : V \to V \mid g \text{ es lineal e invertible } \}$$

La razón de escoger ilustraciones tomadas del álgebra lineal es que—como se verá—la teoría elemental conduce muy rápidamente a resultados interesantes con un mínimo de definiciones adicionales. En particular, el primer punto que queremos ilustrar es el siguiente: que el espacio de las órbitas de $\mathrm{GL}(V)$ en V es muy poco interesante. Sin embargo, en la medida en que se imponen mayores restricciones sobre los elementos de $\mathrm{GL}(V)$—esto es, al restringir las transformaciones de la acción a un *subgrupo* $H \subset \mathrm{GL}(V)$—comienza a ser más rica la *estructura de descomposición* de V; dicho en lenguaje más coloquial: comienza a descubrirse mayor *simetría.* Ello queda puesto de manifiesto al comparar las órbitas de la acción $\Psi\colon \mathrm{GL}(V) \times V \to V$, cuando ésta se restringe sucesivamente de un subgrupo a otro en alguna cadena $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ de subgrupos de $\mathrm{GL}(V)$ como en el siguiente ejemplo:

1. Ejemplo en $\mathbb{R}^2$. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Como bien se sabe, el grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ se identifica de manera concreta con el grupo de matrices invertibles de 2×2:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\},$$

siendo $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de 2×2 con coeficientes reales. Sólo hay dos órbitas de la acción de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ en el plano: (1) el conjunto cuyo único elemento es el origen y (2) su complemento. Podemos restringir un poco más estas transformaciones y sólo considerar aquellas que *preservan la orientación* dada del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Lo que se obtiene así es el subgrupo,

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\},$$

que da lugar a las mismas dos órbitas. Y las mismas se obtienen aún al restringir las transformaciones de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ a aquellas que *preservan área*; es decir, al subgrupo

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\},$$

Digamos que a continuación restringimos nuestra atención a los elementos de $SL_2(\mathbb{R})$ que *preservan* la *ortogonalidad* entre vectores; este es el *subgrupo de de rotaciones en el plano*:

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid g\, g^t = 1\!\!1 \text{ y } \det g = 1\}, \qquad 1\!\!1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Obsérvese ahora que $SO_2(\mathbb{R})$ actuando en $\mathbb{R}^2$ descompone a $\mathbb{R}^2$ en órbitas que son círculos concéntricos (con centro en el origen). Luego, la estructura de descomposición es más interesante. Es fácil darse cuenta de que cada órbita posee un único punto de la forma $(a, 0)$ con $a \geq 0$. Dicho punto es *la forma canónica* de los puntos que se encuentran en esa órbita (**Ejercicio.** Hacer una figura).

2. Ejercicio. Dejaremos que el lector escriba de manera explícita en este ejemplo la biyección $G/G_{x_0} \longleftrightarrow G \cdot x_0$ y observe que, con ella, se pueden distinguir dos tipos de puntos en $\mathbb{R}^2$: aquellos para los que el subgrupo de isotropía G_{x_0} consiste únicamente del elemento idéntico de G y los que no. ¿Cómo se distinguen éstos en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G$?

1.6 Acción de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ en transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$.

El grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ también actúa (por la izquierda) en el conjunto $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ de todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) &\to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \\ (g, T) &\mapsto g \circ T \circ g^{-1} \ . \end{aligned}$$

La elección de una base $\{e_i\}$ para $\mathbb{R}^2$ permite establecer una biyección,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ T & & \mathbf{T} = (T_{ij}) \\ & & \text{con } \ T(e_j) = \sum_i T_{ij} e_i \end{array}$$

de manera que la acción antes mencionada se traduce en la acción del grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ en el conjunto de matrices $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mediante *transformaciones de semejanza*:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ (g, \mathbf{T}) &\mapsto g\, \mathbf{T}\, g^{-1}. \end{aligned}$$

1. Ejercicio. Comprobar con todo detalle que las transformaciones de semejanza resultan de realizar cambios de base en $\mathbb{R}^2$ e interpretar $\mathbf{T}$ y $g\,\mathbf{T}\,g^{-1}$ en $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como las matrices asociadas *a la misma* transformación lineal T respecto a bases distintas.

2. Nota. Recordamos al lector que el conjunto $\mathcal{F}(V)$ de bases de un espacio vectorial V, el conjunto $\mathrm{GL}(V)$ de transformaciones lineales invertibles de V en V y el conjunto $\mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$ de matrices $\dim V \times \dim V$ invertibles con coeficientes en $\mathbb{F}$ están relacionados entre sí mediante correspondencias biyectivas; concretamente:

3. Proposición. *La elección de una base* $\{e_i\}$ *de* V *establece las siguientes biyecciones:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(V) & \longleftrightarrow & \mathrm{GL}(V) & \longleftrightarrow & \mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F}) \\ \{e'_j\} & \longleftrightarrow & g: V \to V & \longleftrightarrow & g = (g_{ij}) \\ & & e'_j = g(e_j) & & g(e_j) = \sum_i g_{ij} e_i \ . \end{array}$$

El problema entonces de encontrar *formas canónicas* para la acción de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ en $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ (equivalentemente, para la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ por transformaciones de semejanza), no es otra cosa que el problema de encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual, la matriz de una transformación lineal toma una forma *muy sencilla.*

4. Ejercicio. Verificar que las transformaciones de semejanza dejan invariante el *polinomio característico* de $\mathbf{T}$ definido como $\chi_{\mathbf{T}}(x) = \det(\mathbf{T} - x\mathbb{1})$.

1.7 Formas canónicas de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$.

1. Proposición. *Para cada* $\mathbf{T} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *distinta de cero, se puede encontrar un* $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *tal que* $g\,\mathbf{T}\,g^{-1}$ *toma una y sólo una de las siguientes formas:*

$\chi_{\mathbf{T}}(x)$	$(x-\lambda)(x-\mu)$	$(x-\lambda)^2$	$(x-\lambda)^2+\mu^2$
Forma canónica	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

siendo λ *y* μ *números reales y* $\mu \neq 0$.

2. Observación. El enunciado del teorema revela que, cuando el polinomio característico tiene dos raices reales e iguales ($\lambda = \mu$), hay necesidad de distinguir entre dos formas canónicas distintas. Dejaremos que el lector consulte en la literatura que lo importante para hacer dicha distinción es el *polinomio mínimo*; éste es, un polinomio $m_{\mathbf{T}}(x)$ tal que, al sustituir la indeterminada x por $\mathbf{T}$ el resultado es $m_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = 0$, idénticamente. Obsérvese que el polinomio característico tiene precisamente esta propiedad. Sin embargo, el polinomio mínimo se caracteriza por: (1) tener grado mínimo entre todos los que satisfacen dicha propiedad y (2) el coeficiente de la potencia más alta de la indeterminada es la unidad. Como $\chi_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = 0$, toda raíz del polinomio característico es también raíz del polinomio mínimo. Luego, éste es un factor de aquél y en el caso $\lambda = \mu$, en matrices de 2×2, las únicas opciones para el polinomio mínimo son $(x - \lambda)$ y $(x - \lambda)^2$, respectivamente (véase [Ja]). En el primer caso $\mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, mientras que en el segundo, $\mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.

1.8 Los números complejos y otras estructuras algebraicas en $\mathbb{R}^2$.

En esta sección deseamos ilustrar cómo, en casos prácticos, uno puede valerse *únicamente* del conocimiento de las formas canónicas, tanto para simplificar la ruta de ataque a un problema, como para obtener información relevante. Tomaremos por pretexto *clasificar* ciertas *álgebras reales* que es posible definir en $\mathbb{R}^2$.

1. Definiciones. Una *álgebra real* (o una $\mathbb{R}$-álgebra) es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{R}$ equipado con una función bilineal $\mu\colon A \times A \to A$ que verifica:

(a) la *propiedad asociativa* $\mu(\mu(u,v),w) = \mu(u,\mu(v,w))$, y

(b) la *existencia de un elemento idéntico* $\mathbb{1} \in A$ tal que, para todo $v \in A$ $\mu(\mathbb{1},u) = u = \mu(u,\mathbb{1})$.

Un *homomorfismo* del álgebra A al álgebra A' es una transformación lineal $\varphi\colon A \to A'$, que verifica:

(a) $\varphi(\mu(u,v)) = \mu'(\varphi(u),\varphi(v))$ y

(b) $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}'$.

2. Observación. Una fuente grande de ejemplos resulta de considerar el conjunto

$$A = \mathrm{End}(V) = \{T\colon V \to V \mid T \text{ es lineal } \}$$

cuando V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y tomar μ como la composición de transformaciones lineales. Una familia interesante de subálgebras de $A = \mathrm{End}(V)$ se obtiene de requerir que las transformaciones lineales $T \in \mathrm{End}(V)$ conmuten con una transformación lineal dada $J\colon V \to V$. Es fácil ver que el subconjunto

$$\mathcal{A}(J) = \{T \in \mathrm{End}(V) \mid T \circ J = J \circ T\}$$

define una subálgebra del álgebra $\mathrm{End}(V)$. Es fácil ver también que si $J = \lambda\,\mathbb{1}$, entonces $\mathcal{A}(J) = \mathrm{End}(V)$; más aún, si $J' = \lambda\,J$ con $\lambda \neq 0$ entonces $\mathcal{A}(J') = \mathcal{A}(J)$. Por otro lado, si $J' = g \circ J \circ g^{-1}$, con $g \in \mathrm{GL}(V)$, entonces, $T \in \mathcal{A}(J')$ si y sólo si $g^{-1} \circ T \circ g \in \mathcal{A}(J)$; en otras palabras,

$$\mathcal{A}(g \circ J \circ g^{-1}) = g \circ \mathcal{A}(J) \circ g^{-1}.$$

Es decir, las álgebras $\mathcal{A}(J)$ y $\mathcal{A}(J')$ resultan *isomorfas* entre sí, vía $T \mapsto \varphi(T) = g^{-1} \circ T \circ g$. Luego, sólo hace falta estudiar $\mathcal{A}(J)$ eligiendo la forma canónica de J bajo la acción de $\mathrm{GL}(V)$, para clasificar las subálgebras de $\mathrm{End}(V)$ que se obtienen de esta manera.

3. Ejercicio. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Luego,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

donde, en el primer caso $\lambda \neq \mu$, mientras que en el tercero, $\mu \neq 0$ y el resultado no depende de λ. Pregunta: ¿Cómo cambia esta clasificación si se restringen los isomorfismos de $\mathcal{A}(J)$ a $\mathcal{A}(J')$ obtenidos al conjugar por una transformación lineal invertible g, a solamente aquellos que satisfacen $\det g > 0$?

El lector reconocerá que en el tercer caso $\mathcal{A}(J)$ es precisamente el álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$. Como espacio vectorial real, los números complejos son $\mathbb{R}^2$ y lo esencial de ellos—desde el punto de vista algebraico—es que es el álgebra real "más pequeña" donde es posible resolver la ecuación $x^2+1=0$. (El lector observará que en el primer caso del ejercicio anterior se describe el álgebra real "más pequeña" donde es posible resolver la ecuación $x^2-1=0$, sin que las soluciones sean únicamente $x = \pm 1$, mientras que en el segundo caso, se describe aquélla donde es posible resolver $x^2 = 0$, con $x \neq 0$).

Ahora bien, $x^2+1=0$ es el polinomio característico de $J_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y bajo la identificación,

$$\mathbb{C} \ni a + ib \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\,\mathbb{1} + bJ_0 \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$$

resulta evidente que lo esencial para poder *multiplicar por i* en $\mathbb{R}^2$ es contar con una transformación lineal $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $J^2 = -\mathbb{1}$. En efecto:

$$(\forall a + ib \in \mathbb{C} \text{ y } \forall v \in \mathbb{R}^2)\ \big(\ (a+ib)\cdot v \quad \longleftrightarrow \quad a\,v + bJ(v)\ \big).$$

Esta propiedad se promueve entonces a la categoría de definición: una *estructura compleja* en un espacio vectorial real V, es un elemento $J \in \operatorname{End}(V)$ que satisface $J^2 = -\mathbb{1}$. El lector verificará que si J es una estructura compleja en V, necesariamente $\dim V$ es par.

4. Ejercicio. Estructuras complejas en $\mathbb{R}^2$. Sea $\operatorname{Comp}(\mathbb{R}^2) = \{J \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2) \mid J^2 = -\mathbb{1}\}$ el conjunto de estructuras complejas de $\mathbb{R}^2$. (1) Demostrar que,

$$\operatorname{Comp}(\mathbb{R}^2) = \left\{ J = \begin{pmatrix} x & y - z \\ y + z & -x \end{pmatrix} \,\Bigg|\, z^2 = 1 + (x^2 + y^2) \right\}.$$

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ actúa en $\mathrm{Comp}(\mathbb{R}^2)$ mediante $(g,J)\mapsto gJg^{-1}$. Demostrar que la acción es transitiva y que el subgrupo de isotropía de ésta en $J_0=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ es,

$$G_{J_0}=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\;\middle|\;a^2+b^2\neq 0\right\}=:GL_1(\mathbb{C}).$$

(3) ¿En cuántas órbitas se descompone $\mathrm{Comp}(\mathbb{R}^2)$ si la acción se restringe a $SL_2(\mathbb{C})$? (hacer un dibujo).

5. Ejercicio. (1) Sea $A=\mathbb{R}^2$ y escribir $A=A_0\oplus A_1$ con $A_0\simeq\mathbb{R}\simeq A_1$. Demostrar que las álgebras reales para las que la multiplicación $\mu\colon A\times A\to A$ verifica las propiedades:

$$\mu(A_0,A_0)\subset A_0,\quad \mu(A_0,A_1)\subset A_1,\quad \mu(A_1,A_0)\subset A_1,\quad \mu(A_1,A_1)\subset A_0$$

con $\mathbb{1}\in A_0$, se clasifican en tres y éstas se pueden identificar con las siguientes subálgebras del álgebra de matrices de 2×2:

$$A(q)=\left\{\begin{pmatrix}a&qb\\b&a\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\},\qquad q=-1,0,1.$$

(2) Sea $q\in\{-1,0,1\}$. Defínase una q-estructura en $\mathbb{R}^2$ como una transformación lineal distinta de cero $J\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, tal que $J^2=q\mathbb{1}$ (y si $q=1$, pídase adicionalmente que $\det J=-1$). Demostrar que el conjunto $\mathrm{Estr}_q(\mathbb{R}^2)$ de q-estructuras en $\mathbb{R}^2$ se puede describir como,

$$\mathrm{Estr}_q(\mathbb{R}^2)=\left\{J=\begin{pmatrix}x&y-z\\y+z&-x\end{pmatrix}\;\middle|\;z^2=-q+(x^2+y^2)\right\}$$

(3) Demostrar que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathrm{Estr}_q(\mathbb{R}^2)$ mediante $(g,J)\mapsto gJg^{-1}$ y describir el subgrupo de isotropía de ésta en $J_0=\left(\begin{smallmatrix}0&q\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. ¿Cuántas órbitas hay si la acción se restringe a $SL_2(\mathbb{R})$?

1.9 Formas bilineales en $\mathbb{R}^2$.

1. Definición. Sea $B\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función que satisface,

$$B(au+bv,w)=aB(u,w)+bB(v,w)\qquad\text{y}\qquad B(u,av+bw)=aB(u,v)+bB(u,w)$$

para todos $a,b\in\mathbb{R}$ y $u,v,w\in\mathbb{R}^2$. Tales son las *funciones bilineales* de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}$ (o, como el rango es el campo subyacente al espacio vectorial, se las denomina también como *formas* bilineales de $\mathbb{R}^2$). Al elegir una base $\{e_1,e_2\}$ para $\mathbb{R}^2$

el conjunto de todas las formas bilineales de $\mathbb{R}^2$ se pone en correspondencia biyectiva con $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (así: $B \longleftrightarrow \mathbf{B} = (B_{ij})$ donde $B_{ij} = B(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2$). Esta vez el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ actúa por cambios de base en el conjunto $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ (\mathbf{B}, g) &\mapsto g^t \mathbf{B}\, g \end{aligned}$$

donde g^t denota la matriz transpuesta de g. Observar que se trata de una acción por la *derecha.*

Una forma bilineal B se llama *simétrica* (resp., antisimétrica) si $B(u, v) = B(v, u)$ (resp., si $B(u, v) = -B(v, u)$), lo cual es equivalente a que su matriz $\mathbf{B}$ satisfaga $\mathbf{B}^t = \mathbf{B}$ (resp., $\mathbf{B}^t = -\mathbf{B}$). El problema de encontrar las formas canónicas para esta acción produce una respuesta apreciablemente distinta a la de la proposición anterior:

1.10 Formas canónicas de formas bilineales en $\mathbb{R}^2$.

1. Proposición. *Para cada $\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ distinta de cero, se puede encontrar un $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tal que $g\, \mathbf{B}\, g^t$ toma una y sólo una de las siguientes formas:*

	Simétrica	*Antisimétrica*	*Simetría indefinida*
$det \mathbf{B} \neq 0$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm \lambda \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$
$det \mathbf{B} = 0$	$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Además, cualesquiera dos de estas matrices están en la misma órbita, si y sólo si el número de -1's y el número de 0's que aparecen en la diagonal, coinciden y $\lambda = \lambda' \neq 0$.

1.11 Formas sesquilineales en $\mathbb{R}^2$.

Cuando el campo subyacente de un espacio vectorial es el de los números complejos, además de formas bilineales puede haber *formas sesquilineales.* Una *forma sesquilineal* en $\mathbb{C}^2$ es una función

$$H \colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

tal que, para cada $u \in \mathbb{C}^2$, la función $\mathbb{C}^2 \ni v \mapsto H(u, v) \in \mathbb{C}$ es lineal y para cada $v \in \mathbb{C}^2$, la función $\mathbb{C}^2 \ni u \mapsto H(u, v) \in \mathbb{C}$ es *antilineal*; es decir,

$$H(a\, u + b\, w, v) = \overline{a}\, H(u, v) + \overline{b}\, H(w, v)$$

para todos u, v y w en $\mathbb{C}^2$ y cualesquiera números complejos a y b.

Al elegir una base de $\mathbb{C}^2$, el conjunto de todas sus formas sesquilineales puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de todas las matrices de 2×2 con entradas complejas. En particular, el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de matrices invertibles de 2×2 con entradas complejas, actúa de la siguiente manera bajo cambios de base:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ (\mathbf{H}, g) &\mapsto \bar{g}^t \mathbf{H}\, g. \end{aligned}$$

Una forma sesquilineal es *hermitiana* (resp., *antihermitiana*) si para todo par de vectores u y v en V, $H(u,v) = \overline{H(v,u)}$ (resp., $H(u,v) = -\overline{H(v,u)}$). **Convención:** en lo sucesivo escribiremos g^* en lugar de $\bar{g}^t$.

1.12 Formas canónicas Hermitianas.

1. Proposición. *Para cada* $\mathbf{H} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *hermitiana o antihermitiana distinta de cero, se puede encontrar una matriz invertible* $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *tal que* $g^* \mathbf{H}\, g$ *toma una y sólo una de las siguientes formas:*

$$\begin{array}{lcc} & \textit{Hermitiana} & \textit{Antihermitiana} \\ det\,\mathbf{H} \neq 0 & \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} & i\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \\ det\,\mathbf{H} = 0 & \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & i\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Además, cualesquiera dos de estas matrices están en la misma órbita, si y sólo si el número de -1*'s y el número de* 0*'s que aparecen en la diagonal, coinciden.*

1.13 Panorama general.

La importante lección que debe aprenderse de todos estos ejemplos es la siguiente: cuando un grupo G actúa en un conjunto X, basta conocer un subconjunto formado por elementos "de aspecto muy sencillo" para recuperar después (y entender fácilmente) la estructura general de X a partir de dicho subconjunto y de la acción misma. Lo repetiremos con otras palabras: basta conocer una sección $\sigma\colon X/G \to X$. La acción permitirá "llegar" a cualquier punto de X que se desee, partiendo de los puntos que constituyen la imagen de σ (la imagen de σ es el conjunto de *formas canónicas* y se le suele referir también como una *transversal* de la acción). **Ejercicio.** Hacer una figura que ilustre esto.

2. GRUPOS CLASICOS Y GEOMETRIA

2.1 Los grupos clásicos en el plano $\mathbb{R}^2$.

Los grupos clásicos en $\mathbb{R}^2$ son aquellos que se obtienen al describir explícitamente los diversos subgrupos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ que resultan ser de isotropía en las formas canónicas $\mathbf{B}$, simétricas o antisimétricas, bajo la acción $(g, \mathbf{B}) \mapsto g^t \mathbf{B}\, g$. Esto es,

$$G_{\mathbf{B}} = \{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid g^t \mathbf{B}\, g = \mathbf{B} \}.$$

La restricción a matrices $\mathbf{B}$ simétricas o antismétricas se debe a que al definir la relación de perpendicularidad mediante una forma bilineal ($u \perp v \Longleftrightarrow B(u, v) = 0$), ésta resulta simétrica si y sólo si B es simétrica o antismétrica. El lector no tendrá dificultad alguna en comprobar los resultados expresados en la siguiente tabla:

$\mathbf{B}$	$G_{\mathbf{B}}$	Nombre
$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{pmatrix} \middle\vert\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$	Grupo Ortogonal
$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$O_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \pm b \\ b & \pm a \end{pmatrix} \middle\vert\ a^2 - b^2 = 1 \right\}$	Grupo de Lorentz
$\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$Sp_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle\vert\ ad - bc = 1 \right\}$	Grupo Simpléctico

Tabla I. *Los grupos clásicos en el plano.* Las combinaciones de signos que aparecen en las matrices de los dos primeros renglones de la tabla son sólo dos: o los dos de arriba, o los dos de abajo. El grupo $Sp_2(\mathbb{R})$ que deja invariante la forma canónica de una forma bilineal antisimétrica se identifica (en esta dimensión únicamente) con el grupo $SL_2(\mathbb{R})$.

2.2 Consideraciones topológicas.

Cabe señalar que todos estos son ejemplos de *grupos topológicos*; es decir, son también espacios topológicos. Un espacio topológico es un conjunto que tiene 'marcados' algunos de sus subconjuntos; éstos se llaman sus *subconjuntos abiertos* (véase [Ke]). Un morfismo $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es una función que, para cada subconjunto abierto $U \subset Y$, produce con su imagen inversa $f^{-1}(U)$ un subconjunto abierto de X. Los morfismos entre espacios topológicos también se llaman *funciones continuas*. Por definición, el complemento $X-U$ de un subconjunto abierto U, es un *subconjunto cerrado* de X. Es claro entonces que si $f : X \to Y$ es continua y $W \subset Y$ es un subconjunto cerrado, $f^{-1}(W)$ es también cerrado. **Ejemplo:** el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio topológico: sus subconjuntos abiertos son aquellos que pueden expresarse como unión de intersecciones finitas de subconjuntos de la forma $B_\rho(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \|x-y\| < \rho\}$ ("bola de radio ρ centrada en y"), siendo $\|x-y\|$ la distancia Euclideana de x a un punto fijo y y ρ un número real positivo. El lector comprobará fácilmente que el subconjunto $\{y\} \subset \mathbb{R}^n$ que consta del solo punto y, es cerrado.

En un grupo topológico se exige que las operaciones del grupo (multiplicar y tomar inversos) sean funciones continuas. En el caso de los grupos clásicos sobre el plano $\mathbb{R}^2$ se observa que se trata de subconjuntos G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ y éste último es, en realidad, un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; a saber, el complemento del subconjunto cerrado $Z = \{g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det g = 0\}$ (¡la función det es continua!). El sistema de "abiertos" en G se define entonces como sigue: $U \subset G$ es abierto si es de la forma $U' \cap G$, con U' un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^4$. Las operaciones de multiplicar y tomar inversos se expresan, respectivamente, como funciones polinomiales y racionales (con denominador distinto de cero por la propiedad de invertibilidad) de las entradas de las matrices que las representan y es fácil convencerse de que dichas funciones son continuas.

1. Ejercicio. Notar, igualmente, que el grupo $\mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$ de matrices invertibles $\dim V \times \dim V$ con entradas en $\mathbb{F}$, es un subconjunto abierto de $\mathbb{F}^{(\dim V)^2}$ y que las operaciones de multiplicar y tomar inversos se expresan, igualmente, como funciones polinomiales y racionales continuas de las entradas.

Recordemos también que un espacio topológico es *conexo* si no es posible encontrar dos subconjuntos abiertos y ajenos en cuya unión se encuentre contenido todo el espacio. Como toda propiedad topológica, la conexidad se preserva bajo funciones continuas. De manera más precisa, *la imagen de un espacio conexo, bajo una función continua, es un espacio conexo.* Un espacio topológico puede tener varias *componentes conexas*; *ie,* varios subconjuntos abiertos desconectados entre sí. De hecho, decir en cuántos trozos desconectados entre sí se descompone un espacio es información topológica relevante. Una propiedad muy interesante de los grupos topológicos que resulta de la continuidad de sus operaciones es que siempre tienen un subgrupo conexo distinguido; a saber, el subconjunto conexo que contiene al elemento idéntico del grupo. Dicho subgrupo suele llamarse *la componente de la idéntidad* del grupo. Además, cada grupo topológico G da lugar a un grupo discreto (esto es, un grupo topológico en el que cada punto es un subconjunto abierto): el conjunto de clases laterales G/G_e, siendo G_e la componente idéntica del grupo. (**Cuidado:** G_e *no es* el subgrupo de isotropía en el elemento $e \in G$ de una acción de G en G, aunque *sí es* el subgrupo de isotropía en $[e] \in G/G_e$ bajo la acción natural de G en G/G_e). Los elementos de G/G_e se identifican entonces con las *componentes conexas* del grupo.

2. Ejercicio. El lector debe observar que las diversas componentes conexas de un grupo resultan ser topológicamente indistinguibles entre ellas: multiplicar los elementos de la componente de la identidad por un elemento fijo en una componente conexa distinta a la de la identidad, produce una correspondencia biyectiva y continua entre dichas componentes. La lección a aprender de esta observación es que *basta con determinar la topología de la componente de la identidad.*

2.3 Topología de los grupos clásicos del plano real.

Con estas ideas en mente, resulta evidente de la Tabla I que el grupo $O_2(\mathbb{R})$ consiste de dos círculos desconectados entre sí: $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)\right\}$. La componente que contiene al elemento idéntico del grupo está formada por las matrices con determinante igual a 1; es decir, el subgrupo de *rotaciones en el plano*,

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Similarmente, el *grupo de Lorentz en el plano* $O_{1,1}$ consta de dos hipérbolas desconectadas entre sí, cada una con dos ramas. La componente que contiene al elemento idéntico del grupo es la rama

$$SO^+_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a^2 - b^2 = 1 \text{ y } a > 0 \right\}.$$

El grupo $Sp_2(\mathbb{R})$ es conexo y dejaremos que el lector demuestre que topológicamente se ve como $S^1 \times \mathbb{R}^2$, siendo S^1 el círculo unitario. De manera más precisa:

1. Ejercicio. Demostrar que dada una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $ad - bc = 1$, existe una descomposición única de la forma,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

con α un número real positivo, β un número real y θ un número real en el intervalo $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$.

2.4 Los Grupos Unitarios en $\mathbb{C}^2$.

Consideraremos ahora el plano complejo $\mathbb{C}^2$. Los *grupos unitarios* del plano complejo son los subgrupos de isotropía en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de la acción $(\mathbf{H}, g) \mapsto g^*\mathbf{H}\, g$, calculados para las formas canónicas $\mathbf{H}$ de las formas hermitianas o antihermitianas:

$$G_{\mathbf{H}} = \{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid g^*\mathbf{H}\, g = \mathbf{H} \}.$$

Los resultados se resumen en la Tabla siguiente, donde a, b y Δ son números complejos y como es usual, $|a|^2$ es el número real no negativo que resulta de calcular $a\bar{a}$.

$\mathbf{H}$	$G_{\mathbf{H}}$
$\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ó $\pm i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \Delta\,\bar{b} & \Delta\,\bar{a} \end{pmatrix} \Big\vert\ \lvert a\rvert^2 + \lvert b\rvert^2 = 1 \text{ y } \lvert\Delta\rvert^2 = 1 \right\}$
$\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ó $\pm i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$U_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \Delta\,\bar{b} & \Delta\,\bar{a} \end{pmatrix} \Big\vert\ \lvert a\rvert^2 - \lvert b\rvert^2 = 1 \text{ y } \lvert\Delta\rvert^2 = 1 \right\}$

Tabla II. *Los grupos unitarios en* $\mathbb{C}^2$.

1. Ejercicio. (1) Considerar el grupo U_2 de la Tabla II. Si se elige una raíz cuadrada $w \mapsto w^{1/2}$ en $\mathbb{C}$, se podrá escribir,

$$g = \Delta^{1/2} \begin{pmatrix} \Delta^{-1/2}a & -\Delta^{-1/2}b \\ \Delta^{1/2}\overline{b} & \Delta^{1/2}\overline{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \text{ y } |\Delta|^2 = 1.$$

Sin embargo, $|\Delta|^2 = 1$ implica que $\Delta^{-1/2} = (\bar{\Delta})^{1/2}$, de manera que si $\alpha = (\bar{\Delta})^{1/2}\,a$ y $\beta = (\bar{\Delta})^{1/2}\,b$, se obtiene, $g = \Delta^{1/2}\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $|\Delta|^2 = 1$.

(2) Comprobar que las matrices de la forma $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ forman un subgrupo de U_2. Dicho subgrupo se denota por SU_2. Por otro lado, el conjunto de los números complejos de norma uno, $U_1 := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta|^2 = 1\}$ es un grupo (isomorfo a SO_2). Comprobar que se puede definir una estructura de grupo en el producto cartesiano $U_1 \times SU_2$ mediante la ley de composición $(\zeta_1, h_1)\,(\zeta_2, h_2) = (\zeta_1\zeta_2, h_1h_2)$, con $\zeta_i \in U_1$ y $h_i \in SU_2$ $(i = 1, 2)$. Este grupo se llama *el producto directo* de U_1 con SU_2. Verificar que la asignación $p : U_1 \times SU_2 \to U_2$, dada por $p(\zeta, h) = \zeta\, h$ define un morfismo *suprayectivo* de grupos. Determinar explícitamente el *kernel* de dicho morfismo; *i.e.*, el conjunto $\mathrm{Ker} p = \{\, (\zeta, h) \in U_1 \times SU_2 \mid p(z, h) = \mathbb{1} \,\}$ y comprobar que éste consta de dos elementos.

2. Observación y nomenclatura. En $\mathbb{C}^2$ tiene sentido hablar de formas bilineales, pero en las correspondientes formas canónicas, no aparecerán los signos “menos” de las entradas diagonales encontrados en las formas canónicas de las fromas bilineales simétricas de $\mathbb{R}^2$. El único grupo de isotropía $G_{\mathbf{B}}$ que aparece para formas bilineales simétricas en $\mathbb{C}^2$ y con determinante distinto de cero es $O_2(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid gg^t = \mathbb{1}\,\}$. Para las formas bilineales antisimétricas en $\mathbb{C}^2$ el resultado sí es exactamente igual al del caso real. Por otro lado, los subgrupos de $O_2(\mathbb{C})$, U_2 y $U_{1,1}$ formados por las matrices con determinante $\Delta = 1$ (no solamente $|\Delta|^2 = 1$), se denotan anteponiendo una ‘S’. Se obtienen así los grupos de la siguiente Tabla:

$$Sp_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Bigm| ad - bc = 1\,; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

$$SO_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Bigm| a^2 + b^2 = 1\,; \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Bigm| |a|^2 + |b|^2 = 1\,; \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$SU_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Bigm| |a|^2 - |b|^2 = 1\,; \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

Tabla III. *Los grupos clásicos en $\mathbb{C}^2$ con determinante* 1. También en este caso se tiene una identificación de $Sp_2(\mathbb{C})$ con $SL_2(\mathbb{C})$ que ocurre solamente en dimensión 2. Todos los grupos de esta tabla son topológicamente conexos.

3. Ejercicio. (1) Notar que la topología de SU_2 es fácil de determinar tras escribir la ecuación real $|a|^2 + |b|^2 = 1$ en términos de los cuatro parámetros reales (a_0, a_1, b_0, b_1), donde $a = a_0 + ia_1$ y $b = b_0 + ib_1$. Se trata de la 3-esfera unitaria,

$$S^3 := \{\, (a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4 \mid a_0^2 + a_1^2 + b_0^2 + b_1^2 = 1 \,\}.$$

(2) La topología de $SU_{1,1}$ también es fácil de determinar si se observa que al escribir $a = a_0 + ia_1$ y $b = b_0 + ib_1$ en $\mathbb{C}$, la correspondencia

$$\begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & b_0 + ib_1 \\ b_0 - ib_1 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix} \qquad \mapsto \qquad \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & -a_1 + b_1 \\ a_1 + b_1 & a_0 - b_0 \end{pmatrix}$$

establece una biyección continua entre $SU_{1,1}$ y $SL_2(\mathbb{R})$. (¡Determinar la inversa!). Luego, $SU_{1,1}$ es topológicamente $S^1 \times \mathbb{R}^2$. ¿Será cierto que los grupos $SU_{1,1}$ y $SL_2(\mathbb{R})$ son isomorfos?

(3) Discutir la topología de los dos primeros grupos de la Tabla III.

2.5 Los cuaterniones y el grupo SU_2.

Sea $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-álgebra definida de la siguiente manera: como espacio vectorial, $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ y se fija una base $\{\mathbb{1}, i, j, k\}$ en términos de la cual la ley de multiplicación toma la forma,

$$\begin{array}{llll} \mathbb{1}i = i = i\mathbb{1}, & \mathbb{1}j = j = j\mathbb{1}, & \mathbb{1}k = k = k\mathbb{1}, & \mathbb{1}^2 = \mathbb{1} \\ ij = k = -ji, & jk = i = -kj, & ki = j = -ik, & i^2 = j^2 = k^2 = -\mathbb{1}. \end{array}$$

Los elementos de $\mathbb{H}$ se llaman *cuaterniones*. Es directo verificar que el producto de cuaterniones es asociativo, pero no es conmutativo. El subespacio tridimensional generado por $\{i, j, k\}$ se llama el subespacio de *cuaterniones puros* y en lo sucesivo se identificará directamente con $\mathbb{R}^3$. Todo $q \in \mathbb{H}$ se descompone en la forma

$$x = x_0 \mathbb{1} + x_1 i + x_2 j + x_3 k = \operatorname{Re} x + \operatorname{Pu} x$$

siendo $\operatorname{Re}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}\,\mathbb{1}$ y $\operatorname{Pu}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3$ las proyecciones lineales a los subespacios generados por $\{\mathbb{1}\}$ e $\{i, j, k\}$, respectivamente. La *conjugación de cuaterniones* es la transformación $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definida por,

$$x = \operatorname{Re} x + \operatorname{Pu} x \mapsto \bar{x} = \operatorname{Re} x - \operatorname{Pu} x.$$

Es directo comprobar que la conjugación de cuaterniones es una *anti-involución* de $\mathbb{H}$; *i.e.,* $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ y $\bar{\bar{x}} = x$. Además $x \in \mathbb{R}\mathbb{1} \Leftrightarrow \bar{x} = x$ y $x \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \bar{x} = -x$.
Convención: En lo sucesivo identificaremos al subespacio $\operatorname{Re}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\mathbb{1}$ con $\mathbb{R}$ bajo la aplicación lineal que hace corresponder $\mathbb{1} \mapsto 1$.

Denotaremos provisionalmente por $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ el producto interior usual de $\mathbb{R}^4$: $\langle x, y \rangle = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Es directo verificar que éste se puede escribir en términos de las operaciones algebraicas de los cuaterniones como,

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x\,\bar{y}).$$

La norma Euclideana de $\mathbb{R}^4$ se escribe en la forma

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x\bar{x}, \qquad x \in \mathbb{H}$$

y es fácil ver que si $x \in \mathbb{H} - \{0\}$, entonces,

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\|\, x \,\|^2} \qquad \text{y} \qquad \|\, x^{-1} \,\| = \frac{1}{\|\, x \,\|}\ .$$

En particular, $\mathbb{H} - \{0\}$ *es un grupo bajo la multiplicación de cuaterniones.* Observar también que, para todos x y y en $\mathbb{H}$, $\|\, xy \,\| = \|\, x \,\|\ \|\, y \,\|$. Con esto en cuenta resulta inmediato demostrar el siguiente resultado:

1. Proposición. *El subconjunto*

$$S^3 = \{\, q \in \mathbb{H} \ \mid\ \|q\| = 1 \,\}$$

es un subgrupo de $\mathbb{H} - \{0\}$ *respecto a la multiplicación de cuaterniones.*

En otras palabras, los cuaterniones unitarios forman un grupo donde se aprecia *a priori* que su conjunto subyacente es la 3-esfera unitaria de $\mathbb{R}^4$. Dado que en un ejercicio anterior se ha demostrado que el conjunto que subyace al grupo SU_2 es también la la 3-esfera, el lector podría sospechar que los grupos SU_2 *y* S^3 *son en realidad isomorfos.* Esto es cierto, como se indica a continuación:

2. Ejercicio. Identificar a $\mathbb{C}$ con el subespacio $\{\, x\,1 + y\,i \mid x, y \in \mathbb{R}\,\} \subset \mathbb{H}$. Verificar que cualquier $x \in \mathbb{H}$ se puede expresar en la forma,

$$x = a + bj, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

Identificar entonces a $\mathbb{H}$ con $\mathbb{C}^2$, vía $x = a + bj \mapsto (a, b)$ e identificarlo también con el subespacio, isomorfo a $\mathbb{C}^2$, formado por todas las matrices de 2×2 con entradas complejas de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$. Demostrar que esta última identificación preserva productos y además,

$$\|\, x \,\|^2 = \bar{x}\, x = |\, a\,|^2 + |\, b\,|^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Concluir entonces que los cuaterniones unitarios S^3 son un grupo isomorfo a SU_2.

2.6 Los grupos clásicos en general.

Dejaremos al lector la tarea de generalizar a $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ lo que hasta aquí hemos expuesto para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}^2$. Básicamente, buscar las formas canónicas de las matrices que representan formas bilineales simétricas o antisimétricas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, así como las formas canónicas de las matrices que representan formas sesquilineales hermitianas o antihermitianas en $\mathbb{C}^n$ y lo instamos a que persiga también las construcciones correspondientes en $\mathbb{H}^n$, siendo éste último el espacio n-dimensional sobre los cuaterniones con multiplicación escalar a la izquierda. Los grupos clásicos resultarán ser los subgrupos de isotropía en dichas formas canónicas para las acciones correspondientes. La notación clásica para estos grupos de isotropía sobre los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se resume en la tabla siguiente:

Tipo	Espacio	Forma canónica para $\mathbf{B}$	Notación para $G_{\mathbf{B}}$	Notación para $G_{\mathbf{B}} \cap SL_n(\mathbb{F})$
Bilineal Simétrica	$\mathbb{R}^n$	$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{p\times p} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{q\times q} \end{pmatrix}$	$O_{p,q}(\mathbb{R})$	$SO_{p,q}(\mathbb{R})$
Bilineal Simétrica	$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{1}_{n\times n}$	$O_n(\mathbb{C})$	$SO_n(\mathbb{C})$
Bilineal Antisimétrica	$\mathbb{F}^{2n}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{n\times n} \\ \mathbb{1}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$	$Sp_{2n}(\mathbb{F})$	
Hermitiana	$\mathbb{C}^n$	$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{p\times p} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{q\times q} \end{pmatrix}$	$U_{p,q}$	$SU_{p,q}$

Tabla IV. *Notación para los grupos clásicos en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$. El grupo $SL_n(\mathbb{F})$ consiste de todas las matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y con determinante igual a 1. Las matrices $\mathbf{B}$ en la columna central pueden también tomarse con signo menos y en el último renglón puede aún multiplicarse por i (caso antihermitiano). Los grupos $Sp_{2n}(\mathbb{F})$ del tercer renglón siempre tiene determinante igual a 1. Finalmente, en el primero y último renglones los casos $(p = n, q = 0)$ y $(p = 0, q = n)$ son equivalentes y la notación para $G_{\mathbf{B}}$ es simplemente $O_n(\mathbb{R})$ y U_n, respectivamente. Obsérvese en particular el caso del grupo U_1 de los números complejos unitarios; éste es isomorfo a $SO_2(\mathbb{R})$.

2.7 Geometría en espacios vectoriales.

Es muy ilustrativo describir los subgrupos de isotropía a los que hacemos referencia, no en términos de las matrices que representan a los diversos objetos que hemos introducido, sino en términos de los objetos mismos. Supondremos que se nos ha dado en V una forma bilineal (simétrica o antisimétrica), o posiblemente sesquilineal (hermitiana o antihermitiana), que *no degenera* (en el sentido de que $B(u, v) = 0$ para todo $v \in V$, implica que $u = 0$ — lo cual corresponde a $\det \mathbf{B} \neq 0$). En general, las transformaciones del grupo $\mathrm{GL}(V)$ alterarán la forma B, de ahí que el objeto importante para el par (V, B) sea, precisamente,

$$G_{B}(V) = \{g \in GL(V) \mid B(gu, gv) = B(u, v) \text{ para todos } u, v \in V\}.$$

El lector deberá poder ver aquí la descripción de un subgrupo de isotropía y apreciará lo económico que resulta recordar de esta manera a los grupos clásicos. (De hecho, es a partir de aquí de donde se derivan las diversas descripciones matriciales que hemos dado antes en los ejemplos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}^2$). Se suele decir entonces que V *está equipado con geometría*

· *ortogonal* si B es bilineal simétrica;

· *simpléctica* si B es bilineal antisimétrica;

· *unitaria* si B es sesquilineal hermitiana o antihermitiana.

En el primer caso el grupo $G_B(V)$ se suele denotar también por $O_B(V)$, o simplemente $O(V)$ si B está fija. En el segundo caso se escribe $Sp(V)$ (dado que sólo hay una forma canónica para B antisimétrica y no degenerada) y en el tercer caso $U_B(V)$ o simplemente $U(V)$ si B está fija. Si además se considera el subgrupo de $G_B(V)$ formado por transformaciones lineales con determinante igual a 1, los casos ortogonal y unitario se suelen distinguir usando la notación $SO_B(V)$ (o simplemente $SO(V)$) y $SU_B(V)$ (o simplemente $SU(V)$), respectivamente. En estas notas, sin embargo, casi siempre usaremos la notación introducida en la Tabla IV.

1. Ejercicio. Considerar nuevamente la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{H}$ de los cuaterniones y el grupo $S^3 = \{\, q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1 \,\}$ definido anteriormente en términos de la norma Euclideana de $\mathbb{R}^4$, $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\,(x\,\bar{y})$ (*i.e.,* $B = \langle\,\cdot, \cdot\,\rangle$). Considerar las funciones ℓ_q :

$\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ $(x \mapsto qx)$ y $r_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ $(x \mapsto xq)$ de multiplicar a la izquierda y a la derecha respectivamente por cuaterniones unitarios, $q \in S^3$. (Notar que éstas son en realidad aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales del espacio vectorial subyeacente $\mathbb{R}^4$). Demostrar que para cualquier par de vectores x y y en $\mathbb{H}$

$$\langle qx, qy\rangle = \langle x, y\rangle = \langle xq, yq\rangle, \qquad q \in S^3.$$

Es decir, que ℓ_q y r_q son elementos de $O_4(\mathbb{R})$. Con un poco más de trabajo el lector puede verificar que, en realidad, ℓ_q y r_q son elementos de $SO_4(\mathbb{R})$. He aquí una lista de los pasos a seguir:

(1) $q = \operatorname{Re} q$ si y sólo si, para todo $q' \in \mathbb{H}$, $q\,q' = q'q$.
(2) $q = \operatorname{Pu} q$ si y sólo si $q^2 = \operatorname{Re}(q^2) \leq 0$.
(3) Sea $\alpha : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un automorfismo (*i.e.,* morfismo biyectivo) de la $\mathbb{R}$=álgebra $\mathbb{H}$, o un *antiautomorfismo* (*i.e.,* que en lugar de la propiedad $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ de un morfismo invertible, lo que se verifica es $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$). Entonces,

$$\alpha(a) = \operatorname{Re} a + T(\operatorname{Pu} a)$$

con $T \in O_3(\mathbb{R})$. (Sugerencia: considerar $\alpha(a^2)$ y los dos incisos anteriores).
(4) Sea $a = \operatorname{Pu} a \neq 0$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$, la transformación,

$$x \mapsto \rho_a(x) = -axa^{-1}$$

es una reflexión respecto al plano que es complemento ortogonal del subespacio generado por a.
(5) Cada rotación de $\mathbb{R}^3$ (*i.e.,* cada elemento de $SO_3(\mathbb{R})$) es de la forma ρ_a para algún $a \in \mathbb{H}$ (no necesariamente con $a \in \mathbb{R}^3$) y todo ρ_a es una rotación de $\mathbb{R}^3$.
(6) Para todos a y b en $\mathbb{R}^3$,

$$ab = -a \cdot b + a \times b = -a \cdot b + \operatorname{Pu}(ab)$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos "interno" y "vectorial" usuales de $\mathbb{R}^3$.
(7) Para cada $q \in \mathbb{H}$, existe un $b \in \mathbb{H} - \{0\}$, con $\operatorname{Pu} b = b$, tal que $qb = \operatorname{Pu}(qb)$.
(8) Cualquier cuaternión unitario puro (*i.e.,* $q \in \mathbb{H}$ con $|q| = 1$ y $\operatorname{Pu} q = q$), se puede expresar en la forma $q = a\,b\,a^{-1}b^{-1}$, con a y b en $\mathbb{H} - \{0\}$.
(9) $\ell_q = \ell_a\,\ell_b\,\ell_a^{-1}\ell_b^{-1}$ y $r_q = r_a\,r_b\,r_a^{-1}r_b^{-1}$ tienen determinante 1.

2.8 Los grupos de Lie en primera aproximación.

Los grupos clásicos son ejemplos de los objetos que constituyen la columna vertebral de nuestra exposición: los *grupos de Lie*. No podemos dejar de anticipar al ávido lector una de sus características esenciales: *cada grupo de Lie G viene acompañado de un espacio vectorial* $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$, *donde G actúa linealmente.* El propósito del capítulo siguiente será precisamente el de estudiar con cierto detalle dicho espacio vectorial y hacerlo explícito en los ejemplos que hemos discutido: los grupos $G_B(V)$.

Sin embargo, en este momento en que ya hemos tenido un primer acercamiento a la topología de los grupos clásicos, podemos tener también un primer acercamiento a las *variedades diferenciables.* La razón de ello es que *un grupo de Lie es*, por definición, *un grupo que tiene estructura de variedad diferenciable y las operaciones de multiplicar y tomar inversos en el grupo, son diferenciables.* Se necesita entonces responder primero a ¿qué es una variedad diferenciable? y la respuesta más popular es: "un espacio topológico (Hausdorff), localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, donde *se vale* derivar".

2.9 Dos de los teoremas más importantes del cálculo diferencial.

Considerar los espacios vectoriales $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Es un hecho básico de álgebra lineal que $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial: al escoger bases para $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ el espacio $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ se identifica con con el espacio vectorial de todas las matrices reales de $m \times n$, que a su vez se identifica con $\mathbb{R}^{mn}$. A continuación usaremos el hecho básico del cáculo diferencial que, *la derivada* de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que es diferenciable en un punto $x \in \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.

1. Definiciones. Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ dos subconjuntos abiertos y sea $f{:}\,U \to V$ una función. Recordamos que 'f diferenciable' significa que la función es diferenciable en cada punto de su dominio. Decimos que 'f es clase C^1', si f es diferenciable y *la función derivada de* f, $\mathrm{d}f : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ $(x \mapsto \mathrm{d}f(x))$, es continua. Inductivamente, 'f es clase C^{k+1}' si '$\mathrm{d}f$ es clase C^k'.

El siguiente resultado del cáculo diferencial es una piedra angular en la teoría de variedades diferenciables.

2. Teorema de la Función Inversa. *Sean U y V dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$ un punto dado. Si,*

$$\textit{(1)}\;\; f : U \to V \;\; \textit{es clase } C^1 \qquad y \qquad \textit{(2)}\;\; \mathrm{d}f(x_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m) \;\; \textit{es invertible,}$$

existe una vecindad $U_0 \subset U$ con $x_0 \in U_0$, tal que al poner $V_0 = f(U_0)$, la restricción

$$f|_{U_0} : U_0 \to V_0$$

es biyectiva y su función inversa es clase C^1.

3. Observación. Observar el carácter *local* de la afirmación, al referirse a *la existencia de una vecindad donde* la propiedad del enunciado se cumple. Existen f's clase C^1 con $\mathrm{d}f$ continuas e invertibles en todo punto (e.g., $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$) pero sólo en una cierta vecindad se puede afirmar que se restringen a una biyección.

4. Ejercicio. Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Observar que $\det \mathrm{d}f(u, v) = 4(u^2 + v^2)$, por lo que f es invertible en vecindades abiertas y 'suficientemente pequeñas' de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. **Problema:** invertir directamente la función f alrededor de un punto arbitrario $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y encontrar la vecindad más grande posible de (u_0, v_0) donde f sea invertible.

5. Nomenclatura. Sean U y U' dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un *difeomorfismo* (de clase C^k, $k \geq 1$) entre U y U' es una función biyectiva $f : U \to U'$ de clase C^k cuya función inversa $g : U' \to U$ es también de clase C^k. Los subconjuntos abiertos U y U' de $\mathbb{R}^n$ *son difeomorfos* si existe un difeomorfismo entre ellos. La notación usual es $U \simeq U'$. **Convención:** cuando hagamos referencia a una 'función diferenciable' la entenderemos como *infinitamente* diferenciable; en particular, todos los difeomorfismos que consideraremos serán de clase C^∞.

El segundo resultado del cálculo diferencial que queremos recordar aquí es el siguiente (muy importante también por la enorme cantidad de resultados en la teoría de las variedades diferenciables que descansan sobre él):

6. Teorema de la Función Implícita.
A. Sean U y W dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ y sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-m}$ ($n \geq m$). Sea

$$F\colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supset U \times V \to W \subset \mathbb{R}^m$$

una función clase C^1 y para un punto $(x_0, y_0) \in U \times V$, suponer que $\mathrm{d}F(x_0, y_0)$ es suprayectiva. Entonces,

(1) *Existe una vecindad $U' \times V' \subset U \times V$ del punto (x_0, y_0) y*
(2) *Existe un difeomorfismo $H\colon U'' \times V'' \to U' \times V'$, tal que*

$$F \circ H(x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_m).$$

B. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea W un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{m-n}$ ($m \geq n$). Sea

$$f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$$

una función clase C^1 y para un punto $x_0 \in U$, suponer que $\mathrm{d}f(x_0)$ es inyectiva. Entonces,

(1) *Existe una vecindad $V' \times W' \subset V \times W$ del punto $f(x_0)$ y*
(2) *Existe un difeomorfismo $G\colon V' \times W' \to V'' \times W''$, tal que*

$$G \circ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

2.10 Fibraciones, puntos regulares y subvariedades.

Observar cómo, a partir de la suprayectividad de la derivada en un sólo punto, el teorema concluye la existencia de vecindades para dominio y codominio donde la función misma es suprayectiva (nuevamente, esto significa que *la conclusión del Teorema tiene un carácter local*). De hecho, el resultado también dice que 'cambiando las variables adecuadamente', la función F se ve como la proyección $(x, y) \mapsto x$, o — como diremos en lo sucesivo — como una *fibración* en las vecindades garantizadas por el teorema. Similarmente, a partir de la inyectividad de la derivada en un sólo punto, el teorema concluye la existencia de vecindades para dominio y codominio donde la función misma es inyectiva y se ve como una *rebanada* $x \mapsto (x, 0)$ o — como diremos en lo sucesivo — como una *subvariedad local* dentro de la vecindad ambiente garantizada por el teorema.

1. Más comentarios y definiciones. Cabe señalar que el cero que aparece en la 'segunda componente' de la rebanada $x \mapsto (x, 0)$ mencionada en la parte B del enunciado, puede ser remplazado por cualquier constante en $\mathbb{R}^{m-n}$ — digamos y_0 — y además, el hecho de que ésta constante aparezca en la segunda componente también es irrelevante: la rebanada puede ser 'vertical'; esto es, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ puede verse así también: $x \mapsto (y_0, x) \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$. Esto nos enfrenta a una *relación importantísima* entre los enunciados A y B del Teorema de la Función Implícita: Sea $F : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supset U \times V \to W \subset \mathbb{R}^m$ como en A. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^m$ fijo y escójanse las vecindades $U' \times V'$ y $U'' \times V''$ como en el teorema. Entonces, *en cada punto* $(x, y) \in U' \times V'$, tal que $F(x, y) = x_0$, la derivada de F es suprayectiva (¡probarlo!) y además, el subconjunto $F^{-1}(x_0) = \{(x, y) \in U' \times V' \mid F(x, y) = x_0\}$ está en correspondencia biyectiva y diferenciable con la rebanada en $U'' \times V''$ definida por $\{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}^{n-m}\}$ (¡probarlo!). Decimos entonces que *la fibra* $F^{-1}(x_0)$ es una *subvariedad cerrada* en $U' \times V'$ de dimensión $n - m$, dado que está parametrizada por los puntos $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ de V''. Un punto x_0 que tiene la propiedad de que para todo punto z en el que $F(z) = x_0$, la derivada $\mathrm{d}F_z$ es suprayectiva, se llama un *valor regular* de F. Un punto z donde $\mathrm{d}F_z$ es suprayectiva se llama un *punto regular* para F. Un *punto crítico* de F es aquél que no es regular. Luego, la relación entre los enunciados A y B del Teorema puede también decirse así: si z_0 es un punto regular, entonces existe toda una vecindad de puntos regulares y, en la imagen inversa $F^{-1}(x_0)$ de un valor regular, cada punto regular tiene una vecindad W' tal que $F^{-1}(x_0) \cap W'$ es una subvariedad cerrada de W'. Un resultado muy importante en el tema es el siguiente: **Lema de Sard.** *El conjunto de valores regulares de una apliación diferenciable* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es denso dondequiera*; dicho en otras palabras, la imagen bajo F de sus puntos críticos es un subconjunto que tiene medida de Lebesgue cero en $\mathbb{R}^m$. Referimos al lector al magnífico libro de John Milnor [Mi] para su demostración.

2.11 Variedades diferenciables.

1. Definición. Una variedad diferenciable real de dimensión m es un espacio topológico Hausdorff, M, equipado con una cubierta abierta contable $\mathcal{U} = \{U_i\}$ tal que, para cada $U_i \in \mathcal{U}$, existe un homeomorfismo

$$\varphi_i : U_i \to \hat{U}_i \subset \mathbb{R}^m$$

con la propiedad de que si $U_i \cap U_j$ no es vacío, entonces

$$\varphi_{ji} := \varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo.

Son ejemplos de variedades reales de dimensión n: el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, la esfera unitaria S^n (definida como subespacio topológico del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$), y el espacios proyectivo $\mathbb{RP}^n$. A continuación veremos en detalle algunos ejemplos.

2. Ejemplo. El círculo S^1. Sea $S^1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$ el círculo unitario. Vamos a probar que es una variedad diferenciable real de dimensión uno.

Como espacio topológico, S^1 tiene la topología relativa proveniente de $\mathbb{R}^2$: los abiertos son todos de la forma $U \cap S^1$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. La cubierta $\mathcal{U}$ que se propone es la formada por los subconjuntos

$$U_1 = V^+ \cap S^1, \qquad U_2 = V^- \cap S^1, \qquad U_3 = U^+ \cap S^1, \qquad U_4 = U^- \cap S^1$$

siendo $U^\pm$ los semiplanos izquierdo y derecho y $V^\pm$ los semiplanos superior e inferior, respectivamente: $U^\pm = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm u > 0\}$ y $V^\pm = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm v > 0\}$. (Hacer una figura).

Se propone también que los homeomorfismos $\varphi_i : U_i \to \hat{U}_i$ tomen todos valores en el mismo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \hat{U}_3 = \hat{U}_4 = (-1,1) \subset \mathbb{R}.$$

Concretamente, estarán dados por

$$\begin{aligned} U_1 \ni (u,v) &\mapsto u \in (-1,1) \qquad & U_2 \ni (u,v) &\mapsto u \in (-1,1) \\ (u, \sqrt{1-u^2}) &\leftarrow u \in (-1,1) & (u, -\sqrt{1-u^2}) &\leftarrow u \in (-1,1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_3 \ni (u,v) &\mapsto v \in (-1,1) \qquad & U_4 \ni (u,v) &\mapsto v \in (-1,1) \\ (\sqrt{1-v^2}, v) &\leftarrow v \in (-1,1) & (-\sqrt{1-v^2}, v) &\leftarrow v \in (-1,1) \end{aligned}$$

Observar por ejemplo que

$$\varphi_1(U_1 \cap U_3) = (0,1) = \varphi_3(U_1 \cap U_3); \qquad \text{y} \qquad \varphi_{31} : u \mapsto \sqrt{1-u^2}$$

es un difeomorfismo de $(0,1)$ en sí mismo. Similarmente,

$$\varphi_4(U_1 \cap U_4) = (0,1), \quad \varphi_1(U_1 \cap U_4) = (-1,0) \quad \text{y} \qquad \varphi_{14} : u \mapsto -\sqrt{1-u^2}$$

es un difeomorfismo.

3. Más sobre el círculo. Considerar nuevamente el círculo unitario $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ pero con respecto a la cubierta

$$V_1 = X^+ \cap S^1, \qquad V_2 = X^- \cap S^1 \quad \text{con,} \quad X^\pm = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid \pm x > 0\}$$

y los homeomorfismos

$$\psi_1 : V_1 \to \hat{V}_1 = \mathbb{R} \qquad \psi_2 : V_2 \to \hat{V}_2 = \mathbb{R}$$

dados por la proyección estereográfica desde los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, respectivamente. Por definición,

$$\psi_1(x,y) = \frac{y}{1-x} \quad \text{y} \quad \psi_2(x,y) = \frac{y}{1+x}.$$

Observar que estas fórmulas se obtienen una de la otra al realizar la reflexión $x \mapsto -x$. Las respectivas funciones inversas son,

$$\psi_1{}^{-1}(z) = \Big(\frac{z^2-1}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\Big) \quad \text{y} \quad \psi_2{}^{-1}(z) = \Big(\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\Big)$$

que están definidas para cualquier $z \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\psi_{21}(z) = \psi_2\Big(-\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\Big) = z^{-1}.$$

Observar que la imagen bajo ψ_i $(i = 1,\, 2)$ de la intersección $V_1 \cap V_2$ es disconexa: se trata del conjunto $\{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{R} \mid z < 0\}$. Resulta fácil ver que $z \mapsto z^{-1}$ es un difeomorfismo de cada una de las componenetes conexas de este conjunto sobre sí mismas.

4. Ejercicio. El lector podrá generalizar esta construcción y probar (vía la proyección estereográfica) que S^n es una variedad diferenciable real de dimensión n. Una conclusión importante de esto es la siguiente:

- **5**.*Los grupos U_1 y SU_2 son variedades diferenciables.*

6. Comentarios a la definición de variedad diferenciable. La definición que dimos depende de la elección de la cubierta abierta $\mathcal{U}$. Las parejas (U_i, φ_i) que allí aparecen se llaman *cartas* locales (o tambien, *mapas locales*) de la variedad. Al conjunto de todas las cartas (o mapas) locales se le llama un *atlas* para la variedad. Si un mismo espacio topológico posee dos atlas distintos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, las cartas de $\mathcal{A}_1$ pueden, o no, ser *compatibles* con las de $\mathcal{A}_2$: dos cartas (U,φ) y (V,ψ) son compatibles si $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo de $\varphi(U \cap V)$ en $\psi(U \cap V)$. La definición de variedad diferenciable se independiza fácilmente del atlas si se dice que se trata de un espacio topológico con base contable equipado con un atlas maximal de cartas compatibles.

7. Ejercicio. El lector puede comprobar fácilmente que las cartas del círculo en el primer ejemplo son compatibles con las cartas del círculo en el segundo ejemplo.

8. Los espacios proyectivos $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{CP}^n$. (Lo que se diga aquí para $\mathbb{RP}^n$ se aplica igualmente para $\mathbb{CP}^n$). En el espacio topológico $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, se define la relación de equivalencia

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) = y \qquad \text{si existe } t \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{tal que } x = ty.$$

El conjunto de clases de equivalencia $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ es el espacio proyectivo real. La notación usual para dicho conjunto de clases de equivalencia es $\mathbb{RP}^n$. Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ la proyección natural y $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ la imagen de $(x_1, \dots, x_{n+1})$ bajo π. La topología de $\mathbb{RP}^n$ es la topología cociente:

$$U \subset \mathbb{RP}^n \quad \text{es abierto} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \quad \text{es abierto.}$$

(El lector podrá comprobar que esta topología es Hausdorff). Nos interesa hacer ver que $\mathbb{RP}^n$ es una variedad diferenciable real de dimensión n. Es fácil convencerse de que los subconjuntos

$$U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\} \qquad i = 1, \dots, n-1$$

forman una cubierta abierta de $\mathbb{RP}^n$ y que las funciones

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n \qquad [x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

son homeomorfismos, lo cual se sigue del hecho de que

$$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \supset \pi^{-1}(U_i) \ni (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

es sobre y la relación de equivalencia que define en el dominio es exactamente la misma que la que define a $\mathbb{RP}^n$.

9. Ejercicio. Calcular explícitamente las funciones φ_{ji} de este ejemplo y terminar de verificar que $\mathbb{RP}^n$ es una veriedad diferenciable real de dimensión n.

10. Ejercicio. Probar que $\mathbb{CP}^1$ es la esfera S^2 argumentando que el conjunto

$$\mathbb{CP}^1 - \{[z_1, z_2] \mid z_1 \neq 0\}$$

sólo tiene un punto (cubierto por la carta $\{[z_1, z_2] \mid z_2 \neq 0\}$) y observando su comportamiento bajo la función de transición $\varphi_{21} : \mathbb{C} - \{0\} \simeq \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \simeq \mathbb{C} - \{0\}$. De manera similar, $\mathbb{CP}^n$ es un espacio topológico compacto, pero no es la compactificación de $\mathbb{C}^n$ por un punto, sino que,

$$\mathbb{CP}^n \simeq \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1}$$

(y lo mismo vale para $\mathbb{RP}^n$).

11. Ejercicio. Trabajar algunos detalles del plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^2$ desde la siguiente perspectiva: el grupo multiplicativo $\mathbb{C} - \{0\}$ actúa, vía multiplicación por escalares, en el conjunto $\mathbb{C}^3 - \{0\}$. La parametrización natural de las órbitas bajo dicha acción es mediante los puntos de $\mathbb{CP}^2$. Observar que el grupo $GL_3(\mathbb{C})$ actúa transitivamente en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ y demostrar que esta acción induce una acción transitiva también en $\mathbb{CP}^2$. Calcular el subgrupo de isotropía correspondiente en $[1, 0, 0] \in \mathbb{CP}^2$. Comprobar que tanto el subgrupo $SL_3(\mathbb{C}) \subset GL_3(\mathbb{C})$ formado por los elementos de determinante 1 aún actúa transitivamente y calcular la isotropía correspondiente en el punto $[1, 0, 0]$. Discutir si los subgrupos SU_3 y $SU_{2,1}$ actúan transitivamente en $\mathbb{CP}^2$.

12. Otros ejemplos: los subconjuntos abiertos en variedades. Si M es una variedad diferenciable y $U \subset M$ es un subconjunto abierto de M, entonces U es una variedad diferenciable de la misma dimensión. Un ejemplo importante de esta clase es el grupo $\mathrm{GL}(V)$ (V un espacio vectorial de dimensión finita). La razón es, como ya lo hicimos notar, que se trata del subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{(\dim V)^2}$ que es complemento del cerrado $\det^{-1}(0)$.

- **13**.*El grupo* $\mathrm{GL}(V)$ *es una variedades diferenciable.*

14. Más ejemplos: el producto de variedades. Si M y N son variedades diferenciables de dimensiones m y n, respectivamente, el producto $M \times N$ (con la topología producto) posee una cubierta abierta contable $\{U_i \times V_j\}$ y homeomorfismos

$$(\varphi_i \circ p_1 \, , \, \psi_j \circ p_2) : U_i \times V_j \to \hat{U}_i \times \hat{V}_j \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

que hacen de $M \times N$ una variedad diferenciable de dimensión $m + n$. (p_1 y p_2 son las proyecciones del producto $U_i \times V_j$ sobre el primero y segundo factores, respectivamente). La demostración de este hecho se sigue fácilmente de la definición categórica de productos pero no entraremos aquí en los detalles (el lector interesado puede consultar [Fa]). Una conclusión inmediata es la siguiente:

- **15**.*Los grupos* $SL_2(\mathbb{R})$ *y* $SU_{1,1}$ *son variedades diferenciables.*

Esto se sigue fácilmente del hecho que la topología de estos grupos es $\mathbb{R}^2 \times S^1$ como ya se ha visto. Otra conclusión importante es la siguiente:

- **16**.*El grupo* $\mathbb{T}^n$ *(o n-toro) definido como* $S^1 \times \cdots \times S^1$ *(n-veces), equipado con la estructura de grupo definida inductivamente mediante el producto directo de grupos, es una variedad diferenciable.*

2.12 Funciones diferenciables entre variedades.

Sean M y N variedades diferenciables reales de dimensiones m y n respectivamente. Sean $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ sistemas de coordenadas locales dados para M y N. Una función continua $F : M \to N$ es diferenciable si para todas las cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}$ las funciones

$$\hat{F}_{ji} := \psi_j \circ F \circ {\varphi_i}^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \psi_j\bigl(F(U_i)\bigr) \subset \mathbb{R}^n$$

son diferenciables. Si $F : M \to N$ es biyectiva y diferenciable con inversa diferenciable, entonces diremos que F es un *difeomorfismo* y que las variedades M y N son difeomorfas (lo que denotaremos por $M \simeq N$).

1. Ejercicio. (1) Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $(U, \varphi_{_U})$ una carta local, con $\varphi_{_U} : U \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^m$. En particular, U es una variedad diferenciable de dimensión m. Defínase,

$$C^\infty(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ es diferenciable } \}.$$

Convencerse de que $f \in C^\infty(U)$ si y sólo si $f \circ \varphi_{_U}^{-1} : \hat{U} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ en el sentido usual.

(2) Considerar $\mathbb{R}^m$ como la variedad producto $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (m veces) y sea $\pi^\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la proyección del producto al μ-ésimo factor. Demostrar que las funciones

$$x^\mu := \pi^\mu \circ \varphi_{_U}\colon U \to \mathbb{R} \qquad \mu = 1, \dots, m$$

son diferenciables. **Terminología:** El conjunto de las m funciones $\{x^1, \dots, x^m\}$ se llaman *las coordenadas locales* de la carta $(U, \varphi_{_U})$. En particular, $x^\mu = \pi^\mu \circ \varphi_{_U} \in C^\infty(U)$.

(3) Sea N una variedad diferenciable de dimensión n y sea $(V, \psi_{_V})$ una carta local, con coordenadas locales $\{y^1, \dots, y^n\}$. Suponer que $F : U \to V \subset N$ es una función continua, con $U \subset M$ como en el inciso anterior. Demostrar que,

$$F : U \to V \subset N \text{ es diferenciable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^\nu \circ F \in C^\infty(U) \quad \forall\ \nu = 1, \dots, n.$$

2. Recapitulación y notación. El ejercicio demuestra que, en términos de las cartas locales $(U, \varphi_{_U})$ de M y $(V, \psi_{_V})$ de N, una función diferenciable, $F\colon U \to V$ induce una aplicación,

$$C^\infty(V) \ \ni \ y^\nu \quad \mapsto \quad y^\nu \circ F \ \in \ C^\infty(U)$$

que denotaremos por $y^\nu \mapsto F^* y^\nu$. La importancia de esta observación se pone de manifiesto en el siguiente resultado:

3. Proposición. *(1) Sean $(U, \varphi_{_U})$ y $(V, \psi_{_V})$ cartas locales de las variedades diferenciables M y N de dimensiones m y n, respectivamente. Sean $\{y^\nu \mid 1 \leq \nu \leq n\}$*

las coordenadas locales de la carta $(V, \psi_{_V})$ de N y sean $f^1, \dots, f^n \in C^\infty(U)$ funciones diferenciables arbitrarias en $U \subset M$. Existe una única función diferenciable $F : U \to V$, tal que $F^* y^\nu = f^\nu$.

(2) Toda función diferenciable $F : U \to V$ induce una aplicación $F^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ definida por $C^\infty(V) \ni h \mapsto F^* h = h \circ F \in C^\infty(U)$ y ésta está unívocamente determinada por las n funciones diferenciables $F^* y^\nu$, siendo $\{y^\nu \mid 1 \leq \nu \leq n\}$ las coordenadas locales de la carta $(V, \psi_{_V})$.

DEM. (1) Una función $F : U \to V$ es diferenciable, si y sólo si $\hat{F} = \psi_{_V} \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1} \colon \hat{U} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Esto significa que $\hat{F}$ es de la forma $\hat{F} = (\hat{F}^1, \dots, \hat{F}^n)$ y que cada una de las funciones componentes $\hat{F}^\nu = \pi^\nu \circ \hat{F} \colon \hat{U} \to \mathbb{R}$ es diferenciable; sin embargo,

$$\hat{F}^\nu = \pi^\nu \circ \hat{F} = \pi^\nu \circ \psi_{_V} \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1} = y^\nu \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1}$$

Por otro lado, $f^\nu \in C^\infty(U)$ si y sólo si, $f^\nu \circ \varphi_{_U}^{-1} \colon \hat{U} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y con las n funciones diferenciables $\hat{f}^\nu = f^\nu \circ \varphi_{_U}^{-1}$ se puede construir una única función diferenciable $\hat{U} \to \mathbb{R}^n$ mediante la asignación $\hat{U} \ni x \mapsto (\hat{f}^1(x), \dots, \hat{f}^n(x))$. Luego, sólo hay que tomar $\hat{F}^\nu = \hat{f}^\nu = f^\nu \circ \varphi_{_U}^{-1}$, para tener, $f^\nu = y^\nu \circ F$.

(2) Observar que,

$$\hat{F}^* \hat{y}^\nu = \hat{y}^\nu \circ \hat{F} = y^\nu \circ \psi_{_V}^{-1} \circ \psi_{_V} \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1} = y^\nu \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1} = (F^* y^\nu)\hat{}$$

por lo que la demostración de (1) implica que sólo hay que probar que, dada $\hat{h} : \hat{V} \to \mathbb{R}$, $\hat{F}^* \hat{h} = \hat{h} \circ \hat{F} = h \circ F \circ \varphi_{_U}^{-1}$ está completamente determinada por las n funciones $\hat{F}^\nu = \hat{F}^* \hat{y}^\nu$, pero esto es evidente de la definición de producto ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ – n-veces) y de notar que, $\hat{h} \circ \hat{F} = \hat{h} \circ (\hat{F}^1, \dots, \hat{F}^n)$. $\square$

4. Ejercicio. Sean $(U, \varphi_{_U})$ y $(V, \psi_{_V})$ cartas locales de las variedades diferenciables M y N de dimensiones m y n, respectivamente. Sean $\{x^\mu \mid 1 \leq \mu \leq m\}$ y $\{y^\nu \mid 1 \leq \nu \leq n\}$ las coordenadas locales de dichas cartas. ¿Cuáles son las coordenadas locales de la carta $(\, \varphi_{_U} \circ p_1 \, , \, \psi_{_V} \circ p_2 \,)$ en $U \times V \subset M \times N$? ¿Cuál es el criterio para que $f : U \times V \to \mathbb{R}$ sea diferenciable?

5. Ejercicio importante: $\mathrm{GL}(V)$ es un grupo de Lie. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita m y considerar el grupo $\mathrm{GL}(V)$. Probar que $\mathrm{GL}(V)$ es una variedad diferenciable de dimensión m^2. Probar que las funciones $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ y $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ definidas al multiplicar e invertir matrices respectivamente, son diferenciables. Luego, $\mathrm{GL}(V)$ es un *grupo de Lie*. Esto es, como ya se ha dicho, *un grupo que a su vez es una variedad diferenciable y en el que las operaciones del grupo son funciones diferenciables.*

6. Ejercicio. Los grupos $G_B(V)$ son grupos de Lie. Suponer que el espacio vectorial V está equipado con la geometría definida por B en el sentido de **2.7**. Demostrar de primeros principios — *i.e.,* usando los teoremas de la función implícita y de la función inversa — que los grupos $G_B(V)$ son grupos de Lie. **Sugerencia:** cuando B es bilineal (resp., sesquilineal), $G_B(V)$ se puede identificar con el subconjunto de $\mathrm{GL}(V)$ definido por los elementos g tales que $g^t\mathbf{B}\,g\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbb{1}$, siendo $\mathbf{B}$ la matriz de B (resp., $g^*\mathbf{B}\,g\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbb{1}$). Dicho subconjunto es cerrado (identificarlo apropiadamente con la imagen inversa de un sólo punto bajo una aplicación diferenciable).

2.13 Translaciones izquierdas y derechas en $\mathrm{GL}(V)$.

En $\mathrm{GL}(V)$ (así como en los subgrupos de $\mathrm{GL}(V)$ que hemos estudiado), la multiplicación $\mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(V)\to\mathrm{GL}(V)$ ($(b,c)\mapsto bc$) induce, al dejar fijo un argumento $a\in\mathrm{GL}(V)$, dos tipos de difeomorfismos:

$$\begin{aligned}\ell_a : \mathrm{GL}(V) &\to \mathrm{GL}(V) \\ x &\mapsto ax\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}r_a : \mathrm{GL}(V) &\to \mathrm{GL}(V) \\ x &\mapsto xa\end{aligned}$$

la *translación izquierda* por a y la *translación derecha* por a, respectivamente. Que se trata de difeomorfismos es inmediato, dado que $(\ell_a)^{-1} = \ell_{a^{-1}}$ y similarmente, $(r_a)^{-1} = r_{a^{-1}}$. De hecho,

$$\ell\colon \mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(V)\to\mathrm{GL}(V) \qquad (a,x)\mapsto ax$$

(resp., $r : (x,a)\mapsto xa$) define una acción diferenciable de $\mathrm{GL}(V)$ en $\mathrm{GL}(V)$ por la izquierda (resp., derecha). Esta acción define a su vez una acción de $\mathrm{GL}(V)$ en $C^\infty(\mathrm{GL}(V))$ por la derecha (resp., izquierda), vía,

$$\begin{aligned}\ell_a^* : C^\infty(\mathrm{GL}(V)) &\to C^\infty(\mathrm{GL}(V)) \\ f &\mapsto \ell_a^* f = f\circ\ell_a\end{aligned}$$

(resp., $f\mapsto r_a^* f = f\circ r_a$). Estas aplicaciones juegan un papel muy importante en la teoría de grupos de Lie y sus representaciones (véanse [He] y [KN]).

1. Ejemplo. Conviene conocer en detalle el ejemplo más sencillo posible: el grupo multiplicativo $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$ de los números reales positivos. Podemos dar un atlas con una sola carta: $U = \mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) = \{c\in\mathbb{R} \mid c>0\}$ y

$$\varphi_{_U} : \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})\to\hat{U} = \{c\in\mathbb{R}\mid c>0\} \qquad c\mapsto\varphi_{_U}(c) = c$$

Para simplificar la notación escribiremos $x = \varphi_{_U}$. Ésta es la coordenada local. Si $a\in\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$, sabemos que $\ell_a\colon\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$ está unívocamente determinada por $\ell_a^*x\in C^\infty(\mathrm{GL}(V))$. Pero entonces, para un punto $c\in\mathrm{GL}(V)$ arbitrario,

$$(\ell_a^*x)(c) = (x\circ\ell_a)(c) = x(\ell_a(c)) = x(ac) = ac = ax(c) \qquad\Longrightarrow\qquad \ell_a^*x = ax$$

y el sentido que hay que darle al producto ax es: *el parámetro positivo a multiplicado – como factor escalar – por la función* $x = \varphi_U$.

Las coordenadas locales en la variedad producto $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$ se obtienen a partir de la coordenada local x en $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$; a saber, $x^1 = p_1^* x = x \circ p_1$ y $x^2 = p_2^* x = x \circ p_2$, siendo p_1 y p_2 las proyecciones del producto $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$ a cada uno de los factores. En términos de estas coordenadas locales, la operación del grupo (la multiplicación $\mu\colon \mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$), quedará unívocamente determinada por la aplicación,

$$\mu^* : C^\infty\big(\,\mathrm{GL}^+(\mathbb{R})\,\big) \to C^\infty\big(\,\mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})\,\big)$$

y ésta es simplemente, $\mu^* x = x^1 x^2$. El sentido que hay que darle a $x^1 x^2$ es el de un producto de dos funciones diferenciables $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; esto es, el producto, punto a punto, de las dos funciones:

$$\begin{aligned}(x^1 x^2)(b,c) &= x^1(b,c)\, x^2(b,c) = p_1^* x(b,c)\, p_2^* x(b,c) \\ &= x \circ p_1\,(b,c)\ x \circ p_2\,(b,c) = x(b)\, x(c) = bc\end{aligned}$$

y desde luego, $x \circ \mu\,(b,c) = x(bc) = bc$, de ahí que $\mu^* x = x^1 x^2$.

2. Ejercicio. Repetir este análisis y determinar ℓ_g^* para todo $g \in \mathrm{GL}(V)$, siendo V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión m. **Sugerencia:** comenzar por notar que $\mathrm{GL}(V)$ se identifica — fijando una base de V — con las matrices $m \times m$ con entradas en $\mathbb{R}$ y éstas a su vez se identifican con $\mathbb{R}^{m^2}$. Las coordenadas naturales son las proyecciones lineales $x_{ij} : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto g_{ij}$, en donde g_{ij} denota la entrada del renglón i y la columna j de la matriz asociada a g. Comprobar que si $\mu : \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ es la multiplicación en $\mathrm{GL}(V)$, entonces,

$$\mu^* x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (\pi_1^* x_{ik})\,(\pi_2^* x_{kj})$$

siendo $\pi_i : \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, la proyección canónica del producto al i-ésimo factor $(i = 1, 2)$. Comprobar también que,

$$\ell_g^* x_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik}\, x_{kj}$$

siendo $g_{ik} = x_{ik}(g) \in \mathbb{R}$ y entendiendo el lado derecho como una combinación lineal a coeficientes reales de las funciones diferenciables x_{kj}.

3. Ejercicio. Repetir el análisis hecho en el ejercicio anterior para determinar μ^* y ℓ_g^* para los grupos $G_B(V)$.

3. ÁLGEBRAS DE LIE

3.1 Definiciones y ejemplos básicos.

1. Definiciones. Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ equipado con una aplicación bilineal, $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ — llamada *el corchete de Lie* — que satisface las siguientes dos propiedades:

(a) la *antisimetría* $\quad [X,Y]=-[Y,X] \quad$ y

(b) la *identidad de Jacobi*
$$\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0.$$

Un *morfismo* entre dos álgebras de Lie, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$, es una transformación lineal $\rho\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ que además satisface, $\rho\big([X,Y]\big)=[\rho(X),\rho(Y)]$.

2. Ejemplo elemental. El espacio vectorial $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$ con $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ igual al producto cruz,
$$[u,v]=u\times v,\qquad u,v\in\mathbb{R}^3$$
es un álgebra de Lie.

3. Observación. En general, la operación $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ no es ni asociativa, ni conmutativa. La falta de asociatividad se comprueba fácilmente en el ejemplo del producto cruz.

3.2 El ejemplo universal $\mathfrak{gl}(V)$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\operatorname{End}V$ el conjunto de todas las transformaciones lineales $L\colon V\to V$. Al definir $(L_1+L_2)(u)=L_1(u)+L_2(u)$ y $(cL)(u)=cL(u)$ para L, L_1 y L_2 en $\operatorname{End}V$ y $c\in\mathbb{R}$, $\operatorname{End}V$ adquiere la estructura de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal, $\operatorname{End}V$ resulta ser una $\mathbb{R}$-álgebra; esto es, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estructura de anillo donde el producto se distribuye linealmente (el producto, en este caso, es la composición de transformaciones lineales):
$$L\circ(c_1L_1+c_2L_2)=c_1L\circ L_1+c_2L\circ L_2$$
Usando estas estructuras algebraicas en $\operatorname{End}V$, se puede definir,
$$[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X,\qquad X,Y\in\operatorname{End}V$$
y verificar que, $\operatorname{End}V$ con esta operación, es un álgebra de Lie. La notación usual para esta álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}(V)$.

El siguiente resultado explica en qué sentido este ejemplo del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ es universal (ref. [Bou]).

1. Teorema de Ado. *Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe un espacio vectorial V y un morfismo inyectivo de álgebras de Lie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$.*

3.3 Representaciones de álgebras de Lie; la representación adjunta ad.

1. Definición. Una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V es un morfismo de álgebras de Lie, $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$.

2. Ejemplo. Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ viene equipada con una representación natural en sí misma; a saber, la *representación adjunta*:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \mathrm{ad}(X) \qquad \mathrm{ad}(X)(Z) := [X, Z]. \end{aligned}$$

Que ad es una representación significa que,

$$\mathrm{ad}([X,Y]) = \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X)$$

y esto es una consecuencia inmediata de la identidad de Jacobi.

3.4 Sobre el problema de Clasificación.

1. Importancia de la representación adjunta. La representación adjunta trae consigo toda la información necesaria para distinguir (y por lo tanto, clasificar) las álgebras de Lie. Si $\{e_i\}$ es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}(e_i)(e_j) = [e_i, e_j] = \sum_k C_i{}^k{}_j e_k = \sum_k (\mathbf{C}_i)_{kj} e_k \ .$$

Es decir, que la matriz $\mathbf{C}_i$ asociada a la transformación lineal $\mathrm{ad}(e_i)$ tiene por entradas a las *constantes de estructura* $C_i{}^k{}_j$ donde k se refiere al renglón y j a la columna. Si se cambia la base por $e'_j = g(e_j) = \sum g_{ij} e_i$ con $g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, entonces,

$$\mathbf{C}'_j = \sum_i g_{ij}\, \mathbf{g}^{-1} \mathbf{C}_i\, \mathbf{g} \qquad \text{con} \quad \mathbf{g} = (\, g_{ij})$$

siendo $\mathbf{C}'_j$ la matriz con entradas $C'_j{}^k{}_l$ definidas por $[e'_j, e'_l] = \sum_k C'_j{}^k{}_l e'_k$. La aplicación $(\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{\dim \mathfrak{g}}) \mapsto (\mathbf{C}'_1, \ldots, \mathbf{C}'_{\dim \mathfrak{g}})$ define una acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ por la derecha. El problema de clasificación es entonces el problema de buscar simultáneamente formas canónicas para las $\dim \mathfrak{g}$ matrices $\mathbf{C}_i$ $(i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g})$, cuando la acción del grupo $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ es la que hemos indicado.

2. Ejercicio. Invitamos al lector a que clasifique directamente todas las álgebras de Lie de dimensión tres. El resultado en concreto es la siguiente:

3. Proposición. *(1) Las clases de equivalencia de las álgebra de Lie de dimensión tres para las que* $ad(e_i)(e_j)$ *(con* $1 \le i < j \le 3$*) son linealmente independientes, están en correspondencia biyectiva con las clases de equivalencia de matrices simétricas y no degeneradas de* 3×3 *bajo la relación,*

$$\mathbf{C}' \sim \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \ g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}) \quad \textit{tales que} \quad \mathbf{C}' = (\det g)^{-1} g \mathbf{C} g^t.$$

(2) Las clases de equivalencia de las álgebra de Lie de dimensión tres para las que $ad(e_i)(e_j)$ *(con* $1 \le i < j \le 3$*) son linealmente dependientes, están en correspondencia biyectiva con las clases de equivalencia de matrices no simétricas de* 2×2 *bajo la relación,*

$$\mathbf{C}' \sim \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \quad \textit{tales que} \quad \mathbf{C}' = (\det g)^{-1} g \mathbf{C} g^t.$$

3.5 La forma de Cartan-Killing.

En términos de la representación adjunta se puede definir una forma bilineal y simétrica,

$$\kappa \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$$

de manera muy sencilla:

$$\kappa(X, Y) = \mathrm{Tr}\big(\,\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)\,\big).$$

De hecho, es muy fácil comprobar que κ es una forma bilineal que permanece invariante ante cualquier *automorfismo* de $\mathfrak{g}$. Recordamos que

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid \varphi\big([X, Y]\big) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \ \}$$

es el *grupo de automorfismos de* $\mathfrak{g}$. Luego, el lector verificará fácilmente que,

$$\kappa\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = \kappa(X, Y), \qquad \text{para todo } \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

En otras palabras,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset G_\kappa = \{\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid \kappa\big(\psi(X), \psi(Y)\big) = \kappa(X, Y)\,\}.$$

1. Ejercicio. Demostrar que la forma de Cartan-Killing para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}l(V)$ está dada por,

$$\kappa(X, Y) = 2\,\mathrm{Tr}(X \circ Y) - \dim V \ \mathrm{Tr}(X) \ \mathrm{Tr}(Y).$$

2. Observación. En general, κ es una forma bilineal degenerada. Sin embargo, las álgebras de Lie para las que κ no es degenerada son muy especiales y en ellas se puede abordar de el problema de clasificación haciendo uso de métodos geométricos: los métodos derivados de la geometría κ. Tales álgebras se llaman *semisimples.* Estas juegan un papel muy importante en el problema de clasificación porque admiten una descomposición en suma directa de subálgebras de la misma índole; concretamente, el complemento ortogonal con respecto a κ de una subálgebra es también una subálgebra. Además, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se puede descomponer en la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$, siendo $\mathfrak{s}$ una subálgebra semisimple y $\mathfrak{r}$ una subálgebra muy especial de $\mathfrak{g}$; a saber, se trata de la subálgebra más grande que hay en $\mathfrak{g}$ con las siguientes dos propiedades: (1) $\mathrm{ad}(\mathfrak{s})(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}$ y (2) la sucesión de subespacios $\mathfrak{r}^{(i+1)} = [\mathfrak{r}^{(i)}, \mathfrak{r}^{(i)}]$ (con $\mathfrak{r}^{(0)} = \mathfrak{r}$) es estrictamente decreciente hasta llegar al punto en reducirse al subespacio cero (véase [Hu]). Las subálgebras con estas propiedades se llaman *solubles* y se puede demostrar que siempre se puede encontrar una representación $\rho\colon \mathfrak{r} \to \mathfrak{g}l(V)$ inyectiva y una base de V, en términos de la cual las matrices correspondientes a las transformaciones en la imagen de ρ son triangulares. Este resultado se conoce como el *Teorema de Lie para álgebras solubles* (*cf.* [Hu]).

3.6 Las álgebras de Lie clásicas.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $B\colon V \times V \to \mathbb{F}$ una geometría en V. Es fácil verificar que el conjunto

$$\mathfrak{g}_B = \{X \in \mathfrak{g}l(V) \mid B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0\}$$

es un *subespacio real* del espacio vectorial $\mathfrak{g}l(V) = \mathrm{End}\, V$ y que es cerrado bajo $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ al restringir el corchete de Lie a $\mathfrak{g}_B$. Es decir, $\mathfrak{g}_B$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}l(V)$.

Las álgebras $\mathfrak{g}_B$ se pueden representar en términos de matrices eligiendo una base para V y notando que la condición $B(Xu, v) + B(u, Xv) = 0$ para todos $u, v \in V$ es equivalente a,

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}^t\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathbf{X} = 0 \qquad &&\text{si } B \text{ es bilineal, ó,} \\ &\mathbf{X}^t\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\overline{\mathbf{X}} = 0 \qquad &&\text{si } B \text{ es sesquilineal.} \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{B}$ la matriz asociada a la forma B en la base elegida y $\mathbf{X}$ la matriz asociada a la transformación lineal X con respecto a dicha base (obsérvese que en el caso sesquilineal, la transformación $\mathbf{X} \mapsto \overline{\mathbf{X}}^t$ esta bién definida para la estructura *real* del espacio vectorial $\mathrm{End}\,(V)$). Dejando que $\mathbf{B}$ corresponda a cada una de las formas canónicas que proporcionan geometría a V, se obtiene una lista completa de ellas. En particular, la Tabla V describe explícitamente las álgebras de Lie correspondientes a los grupos de las Tablas I y III:

$\mathbf{B}$	$\mathfrak{g}_{\mathbf{B}}$	Descripción	Base	$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{sp}_2$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & -\lambda \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}\right\}$	$h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ $e_+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $e_- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$[h,e_+] = 2e_+$ $-[h,e_-] = 2e_-$ $[e_+,e_-] = h$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{o}_2$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$	$i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$[i,i] = 0$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{o}_{1,1}$	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$	$\beta = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$[\beta,\beta] = 0$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{u}_2$	$\left\{i\left(\begin{smallmatrix} \lambda & -c \\ \bar{c} & \mu \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R};\ c \in \mathbb{C}\right\}$	$i\sigma_0 = i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $i\sigma_1 = i\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $i\sigma_2 = i\left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $i\sigma_3 = i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$[i\sigma_0, i\sigma_j] = 0$ $[i\sigma_1, i\sigma_2] = -2i\sigma_3$ $[i\sigma_2, i\sigma_3] = -2i\sigma_1$ $[i\sigma_3, i\sigma_1] = -2i\sigma_2$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{u}_{1,1}$	$\left\{i\left(\begin{smallmatrix} \lambda & c \\ \bar{c} & \mu \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R};\ c \in \mathbb{C}\right\}$	$i\eta_0 = i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $-i\eta_1 = i\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $-i\eta_2 = i\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $i\eta_3 = i\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$[i\eta_0, i\eta_j] = 0$ $[i\eta_1, i\eta_2] = 2i\eta_3$ $[i\eta_2, i\eta_3] = -2i\eta_1$ $[i\eta_3, i\eta_1] = -2i\eta_2$

Tabla V. *Las álgebras de Lie clásicas en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{C}^2$. Las matrices $\mathbf{B}$ en la columna de la izquierda pueden también tomarse con signo menos y en los últimos dos renglones—donde se supone que la forma B es sesquilineal—pueden aún multiplicarse por $\pm i$ sin alterar los resultados. Los primeros dos renglones son válidos para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y en cualquier caso, $\mathfrak{sp}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2$, que es una peculiaridad del caso bidimensional.

3.7 Relación entre grupos y álgebras de Lie.

El grupo clásico G_B asociado a la geometría B definida en el espacio vectorial V y la correspondiente álgebra de Lie $\mathfrak{g}_B$ son objetos algebraicos relacionados entre sí: ya hemos hecho notar a través de los sencillos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ que G_B es un subespacio topológico de $\mathrm{GL}(V)$ y que este último es un subconjunto abierto del espacio Euclídeo $\mathbb{F}^{(\dim V)^2}$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_B$ es un espacio vectorial isomorfo al espacio vectorial T_eG_B constituido por *todos los vectores tangentes en el elemento idéntico* e, *a curvas* *contenidas en* G_B. De manera más concreta, se tiene el siguiente resultado que, a pesar de su sencillez, resulta ser una piedra angular en la teroía de los grupos de Lie:

1. LEMA. *Sea* $t \mapsto g(t) \in G_B$ *una curva diferenciable definida en un intervalo abierto* $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$*, con* $g(0) = e$*, siendo* $e \in G_B$ *el elemento idéntico. Entonces, para cada* t *en dicho intervalo,* $g(t)^{-1}g'(t) \in \mathfrak{g}_B$*. En particular,* $g'(0) \in \mathfrak{g}_B$*.*

DEM. La hipótesis dice que $B(g(t)u, g(t)v) = B(u, v)$ para todo t en $(-\epsilon, \epsilon)$ y para todos u y v en V. Derivando con respecto a t, se obtiene,

$$B(g'(t)u, g(t)v) + B(g(t)u, g'(t)v) = 0$$

de donde se sigue que $g(t)^{-1}g'(t) \in \mathfrak{g}_B$. $\square$

2. Ejercicio. Los generadores infinitesimales de G**.** Sea G un grupo de Lie arbitrario y consideremos el conjunto $C^\infty(G)$ de todas las funciones diferenciables $f : G \to \mathbb{R}$. Claramente $C^\infty(G)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra bajo suma y multiplicación de funciones realizadas punto a punto ($(f + h)(x) = f(x)\,h(x)$ y $(f\,h)(x) = f(x)\,h(x)$, para todo $x \in G$). Una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $X : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ que satisface la propiedad,

$$X(f\,h) = X(f)\,h + f\,X(h), \qquad \text{para todas} \quad f, h \in C^\infty(G)$$

se llama una *derivación* del álgebra $C^\infty(G)$. Comprobar que el conjunto $\mathfrak{X}(G)$ formado por todas las derivaciones del álgebra $C^\infty(G)$ tiene la estructura de un álgebra de Lie bajo la operación,

$$\begin{aligned}[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) &\to \mathfrak{X}(G)\\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] := X \circ Y - Y \circ X\end{aligned}$$

Una derivación $X \in \mathfrak{X}(G)$ se llama *invariante por la izquierda* si para cada $g \in G$,

$$X \circ \ell_g^* = \ell_g^* \circ X$$

como aplicaciones $C^\infty(G) \to C^\infty(G)$, siendo $\ell_g : G \to G$ el difeomorfismo definido al multiplicar en G por g a la izquierda: $x \mapsto gx$. Comprobar que el subconjunto de derivaciones invariantes por la izquierda define una subalgebra — denotada por $\mathfrak{g}$ — del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(G)$. Demostrar que en realidad, si G es un grupo de Lie de dimensión n, existen exactamente n derivaciones invariantes por la izquierda que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. El álgebra $\mathfrak{g}$ se llama *el álgebra de Lie del grupo de Lie* G*.*

3. Ejercicio. (1) Sea $G = \mathrm{GL}(V)$ y considerar las coordenadas x_{ij} introducidas en el capítulo anterior. Demostrar que las derivaciones

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{kj}} : C^\infty(\mathrm{GL}(V)) \to C^\infty(\mathrm{GL}(V))$$

generan las derivaciones invariantes por la izquierda.

(2) Determinar las derivaciones invariantes por la izquierda de los grupos G_B y comprobar que éstas forman un espacio vectorial real de dimensión finita que coincide con $\mathfrak{g}_B$.

3.8 La aplicación exponencial de matrices.

1. Construcción. Sea $X \in \mathfrak{g}l(V)$ y sea $\mathbf{X} = (X_{ij})$ su matriz respecto a una elección de base $\{e_i\}$ de V. Sea $x = \mathrm{Sup}\{|X_{ij}|\}$. Se puede demostrar fácilmente por inducción que, para todos i y j, $|(X^k)_{ij}| \leq (x \dim V)^k$, siendo $(X^k)_{ij}$ la entrada i-j de la matriz correspondiente a $X^k = X \circ \cdots \circ X$ (k veces); esto es, de la matriz $\mathbf{X}^k$. En particular, cada una de las entradas matriciales de la serie,

$$\mathbb{1} + \mathbf{X} + \frac{1}{2!}\,\mathbf{X}^2 + \frac{1}{3!}\,\mathbf{X}^3 + \cdots$$

tiene un valor absoluto menor o igual que $e^{x \dim V}$ y por lo tanto, la serie matricial converge a la matriz

$$\mathrm{Exp}(\mathbf{X}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathbf{X}^k$$

y la convergencia es uniforme en cualquier subconjunto compacto de $\mathrm{Mat}_{\mathrm{dim}V \times \mathrm{dim}V}(\mathbb{F})$.

2. Ejercicio. Considerar la matriz $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y un número real arbitrario $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que para todo número natural k, se tiene,

$$(tJ)^{2k} = (-1)^k t^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (tJ)^{2k+1} = (-1)^k t^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{Exp}(tJ) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \displaystyle -\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

para todo número real t.

3.9 La derivada de Exp.

La aplicación Exp define pués, una aplicación *analítica*,

$$\mathrm{Exp}\colon \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F}).$$

Su derivada en el punto $\mathbf{X} = 0 \in \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F})$ es la aplicación lineal identidad:

$$\begin{aligned}(\mathrm{dExp})_0 : \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F}) &\to \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F})\\ \mathbf{Y} &\mapsto \mathbf{Y}\end{aligned}$$

como se puede comprobar a partir de,

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(\mathbf{X}) &= \big(\, \delta_{ij} + X_{ij} + \text{términos de orden superior} \,\big)\\ \implies \qquad \frac{\partial}{\partial X_{k\ell}} \mathrm{Exp}(\mathbf{X}) \bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{0}} &= \frac{\partial}{\partial X_{k\ell}} \big(\, \delta_{ij} + X_{ij} + \text{térms. ord. sup.} \,\big) \bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{0}} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\,.\end{aligned}$$

En particular, el Teorema de la Función Inversa garantiza que Exp *define una biyección diferenciable de una vecindad de* $0 \in \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}$ *a una vecindad de* $\mathrm{Exp}(0) = \mathbb{1} \in \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}$ *con inversa diferenciable.* De hecho, se trata de una vecindad de $\mathrm{Exp}(0) = \mathbb{1} \in \mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$, puesto que $\mathrm{Exp}(\mathbf{X})$ es invertible y su inversa es $\mathrm{Exp}(-\mathbf{X})$, según se sigue del siguiente resultado cuya demostración es un **ejercicio** sencillo en series de potencias:

1. Lema. *Si* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{Y}$ *conmutan, entonces* $\mathrm{Exp}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathrm{Exp}(\mathbf{X})\,\mathrm{Exp}(\mathbf{Y})$.

2. Corolario. *La aplicación* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{Exp}(t\,\mathbf{X}) \in \mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$ *define un homomorfismo diferenciable de grupos y todo homomorfismo diferenciable* $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$ *es de esta forma, para alguna matriz* $\mathbf{X}$.

Dem. En realidad sólo queda por verificar la segunda afirmación. Si $t \mapsto \mathbf{E}(t)$ es un tal homomorfismo diferenciable, entonces $\mathbf{E}(s+t) = \mathbf{E}(s)\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{E}(0) = \mathbb{1}$. Derivando con respecto a s y evaluando en $s = 0$ se tiene,

$$\mathbf{E}'(t) = \mathbf{E}'(0)\mathbf{E}(t)$$

Pero $\mathbf{E}'(0)$ es una matriz fija — ¡llámese $\mathbf{X}$ para entender el enunciado! — y cada una de las columnas de $\mathbf{E}(t)$ satisfacen esta ecuación diferencial lineal cuya matriz de coeficientes es $\mathbf{E}'(0)$. Dado que $\mathbf{E}(0) = \mathbb{1}$, se tiene que $\mathbf{E}(t) = \mathrm{Exp}\big(\,t\,\mathbf{E}'(0)\,\big)$. $\square$

3.10 Subgrupos uniparamétricos y la aplicación $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}l(V) \to \mathrm{GL}(V)$.

Movamos ligeramente nuestro punto de atención y ahora, en lugar de pensar en $\mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}$ y $\mathrm{GL}_{\dim V}(\mathbb{F})$, pensemos en $\mathfrak{g}l(V)$ y $\mathrm{GL}(V)$, respectivamente.

Sea $E\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ un homomorfismo diferenciable de grupos. La imagen $E(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(V)$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$. Los subgrupos de $\mathrm{GL}(V)$ que son de esta forma se llaman *subgrupos uniparamétricos*. El Corolario anterior dice exactamente cómo son todos los subgrupos uniparamétricos de $\mathrm{GL}(V)$. En efecto: sólo basta observar que la elección de una base $\{v_i\}$ de V establece un isomorfismo entre $\mathfrak{g}l(V)$ y $\mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F})$ y este isomorfismo puede usarse para hacer afirmaciones sobre transformaciones lineales directamente y no sobre las matrices que las representan. En particular, se tiene que,

(1) *Existe una biyección diferenciable de una vecindad de* $0 \in \mathfrak{gl}(V)$ *a una vecindad de* $\mathbb{1} \in \mathrm{GL}(V)$.

(2) *Todo homomorfismo diferenciable* $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ *es de la forma* $t \mapsto \mathrm{Exp}(t\,X)$ *para alguna transformación lineal* $X \in \mathfrak{gl}(V)$.

(3) *El vector tangente a la curva* $t \mapsto \mathrm{Exp}(t\,X)$ *en el punto* $t = 0$ *es igual a* X.

(4) *Si* $g \in \mathrm{GL}(V)$*, entonces,* $g \circ \mathrm{Exp}(t\,X) \circ g^{-1} = \mathrm{Exp}(t\; g \circ X \circ g^{-1})$.

(5) *Si* $X \in \mathfrak{g}_B$*, entonces* $\mathrm{Exp}(t\,X) \in G_B$*, para todo* t*, siendo* B *una geometría en* V.

1. Ejercicio. El lector debe asegurarse de comprender la diferencia sutil que hay entre estos enunciados hechos en términos de *transformaciones lineales* $X \in \mathfrak{gl}(V)$ y las correspondientes afirmaciones que ya se han hecho en términos de *matrices* $\mathbf{X} \in \mathrm{Mat}_{\dim V \times \dim V}(\mathbb{F})$. El lector debe convencerse tambén de que en realidad el único de estos enunciados que necesita un poco de trabajo adicional es el último. Para probarlo, hay que usar el hecho de que si $\mathbf{X}$ es la matriz de $X \in \mathfrak{g}_{_B}$, entonces $\mathbf{X} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}^t\,\mathbf{B}$ (caso de B bilineal) y por otra parte, $\mathrm{Exp}(X)$ está en G_B, si y sólo si, $\mathrm{Exp}(-X) = \mathbf{B}^{-1}\,\mathrm{Exp}(X)^t\mathbf{B}$. Cuando B es sesquilineal el análisis es similar. En cualquier caso, $\mathrm{Exp}(X)^{-1} = \mathrm{Exp}(-X)$.

3.11 Representaciones de grupos; la representación adjunta Ad.

La acción natural de $\mathrm{GL}(V)$ en $\mathrm{End}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ dada por,

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V) \qquad (g, X) \mapsto g \circ X \circ g^{-1}$$

define una representación de $\mathrm{GL}(V)$ en el espacio vectorial $\mathfrak{gl}(V)$, denotada por Ad y llamada *la representación adjunta* de $\mathrm{GL}(V)$:

$$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}(V)).$$

En general: sea G un grupo y V un espacio vectorial. Una *representación* de G en V es un homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to GL(V)$; es decir, una función que satisface $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$. En otras palabras, una representación de G en V es exactamente una acción de G en V por transformaciones lineales como ya se había definido antes: $(g, v) \mapsto \rho(g)(v)$.

1. Ejemplo. La representación $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}(V))$ se restringe a G_B para dar lugar a

$$\mathrm{Ad}\colon G_B \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{_B}).$$

En efecto, si $X \in \mathfrak{g}_B$ y $g \in G_B$, entonces,

$$\begin{aligned}
B(g \circ X \circ g^{-1}u, v) &= B(g \circ X \circ g^{-1}u, g \circ g^{-1}v) = B(X \circ g^{-1}u, g^{-1}v) \\
&= -B(g^{-1}u, X \circ g^{-1}v) = -B(g \circ g^{-1}u, g \circ X \circ g^{-1}v) \\
&= -B(u, g \circ X \circ g^{-1}v).
\end{aligned}$$

Obsérvese que no sólo se tiene $\mathrm{Ad}(G_B) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_B)$, sino que

$$\mathrm{Ad}(G_B) \ \subset \ \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_B) \ \subset \ \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_B)$$

lo que se sigue fácilmente de notar que,

$$\begin{aligned}
[\, g \circ X \circ g^{-1},\, g \circ Y \circ g^{-1}] &= g \circ X \circ g^{-1} \circ \, g \circ Y \circ g^{-1} - g \circ Y \circ g^{-1} \circ \, g \circ X \circ g^{-1} \\
&= g \circ [X, Y] \circ g^{-1}.
\end{aligned}$$

2. Lema. *Sea $t \mapsto g(t) \in G_B$ una curva diferenciable definida en un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, tal que $g(0) = e$, siendo $e \in G_B$ el elemento idéntico. Entonces, para todo $Y \in \mathfrak{g}_B$,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t) \circ Y \circ g(t)^{-1} = g(t) \circ \ \big(\ g(t)^{-1}g'(t) \circ Y - Y \circ g(t)^{-1}g'(t)\ \big) \ \circ g(t)^{-1}.$$

En particular, si $g'(0) = X$ (e.g., si $g(t) = \mathrm{Exp}(t\,X)$), entonces,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} Ad\big(\,\mathrm{Exp}(t\,X)\,\big)\, Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) \circ Y \circ g(t)^{-1} = [X, Y] = ad(X)(Y).$$

Dem. Basta probar que,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t)^{-1} = -g(t)^{-1} \circ g'(t) \circ g(t)^{-1}$$

pero esto se sigue de derivar con respecto a t ambos miembros de $g(t) \circ g(t)^{-1} = \mathbb{1}$. $\square$

3. Ejercicio. (1) Sea $t \in \mathbb{R}$. Calcular $\mathrm{Exp}(tJ_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, para

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observar que las matrices $\{J_i\}$ forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{o}_3$ del grupo O_3. En particular, $\mathrm{Exp}(tJ_i) \in SO_3$.

(2) Demostrar que existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{o}_3$, tal que $\varphi(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = [\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})]$. ¿Qué ambigüedad hay al definir un isomorfismo con esta propiedad?

(3) Demostrar que $\varphi \circ \mathrm{Exp}(tJ_i) = \mathrm{Ad}\big(\mathrm{Exp}(tJ_i)\big) \circ \varphi$ para $i = 1, 2, 3$. ¿Se puede concluir que $\varphi \circ g = \mathrm{Ad}(g) \circ \varphi$, para todo $g \in SO_3$? ¿Por qué?

Entre otras cosas, este ejercicio demuestra que la representación Ad — que se ha definido en subgrupos G_B del grupo $GL(V)$ — puede ser esencialmente la misma que la representación $G_B \hookrightarrow GL(V)$ definida por la inclusión. En otras palabras, que la representación Ad puede no ser del todo extraña. El ejercicio también sirve de base para definir en general la noción de *equivalencia entre representaciones*: Sean $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dos representaciones de G. Las representaciones se llaman *equivalentes* si existe un isomorfismo $\varphi\colon V_1 \to V_2$ tal que para todo $g \in G$, $\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$.

3.12 La componente de la identidad $(G_B)_e$.

La aplicación Exp es una función continua (de hecho, diferenciable y analítica) que tiene por dominio al espacio vectorial $\mathfrak{g}l(V)$; éste, como espacio topológico, es conexo. Por lo tanto, la imagen de $\mathfrak{g}l(V)$ bajo Exp es conexa y como $\mathrm{Exp}(0) = \mathbb{1}$, la imagen debe ser un subespacio topológico conexo de la componente de la identidad $(G_B)_e$. De hecho, se tiene el siguiente resultado (*cf.* [He]):

1. Proposición. *La componente de la identidad $(G_B)_e$ del grupo G_B, está generada – como grupo – por la imagen de* Exp*; es decir, cualquier elemento $g \in (G_B)_e$ se puede expresar como un producto finito de la forma* $\mathrm{Exp}(X_1)\,\mathrm{Exp}(X_2) \cdots \mathrm{Exp}(X_r)$ *con $X_i \in \mathfrak{g}_{_B}$.*

2. Ejercicio. ¿Puede escribirse $g \in (G_B)_e$ en la forma $g = \mathrm{Exp}(X_1) \cdots \mathrm{Exp}(X_r)$ con un r mínimo e igual para todo $g \in (G_B)_e$? El lector puede encontrar fácilmente algunos ejemplos de esta proposición con $r = 1$ *exactamente.* Un ejemplo inmediato es el grupo $\mathbb{R} - \{0\}$ bajo multiplicación. Este tiene dos componentes conexas y la componente de la identidad es exactamente la imagen de la apliación exponencial usual de números reales. ¿Puede el lector pensar en algún ejemplo con $r \neq 1$? ¡Cuidado! La pregunta es capciosa. He aquí una breve aclaración: considérese el grupo $G = SO_3$ de rotaciones en el espacio Euclidiano tridimensional. Por un lado, el ejercicio anterior demuestra que $\mathrm{Exp}(tJ_i) \in SO_3$ es una rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje i ($i = 1, 2, 3$) que *está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$.* El conocido resultado de que *toda rotación en $\mathbb{R}^3$ está determinada por sus tres ángulos de Euler* lo que dice es que para cada elemento $g \in SO_3$, existen tres números reales (θ, ϕ, ψ) — cada uno en el intervalo $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ — tales que $g = \mathrm{Exp}(\theta J_3)\,\mathrm{Exp}(\phi J_2)\,\mathrm{Exp}(\psi J_3)$. ¿Podría entonces decirse que $r = 3$? La respuesta es: NO si lo que queremos es encontrar un r mínimo que sirva para todo $g \in SO_3$. De hecho, hay otro resultado muy conocido para rotaciones en el espacio tridimensional que dice que *toda rotación en $\mathbb{R}^3$ está determinada por* *un eje de rotación y un ángulo de rotación alrededor de dicho eje.* En otras palabras, que para cada $g \in SO_3$, existe una combinación lineal $X = \alpha J_1 + \beta J_2 + \gamma J_3 \in \mathfrak{o}_3$ con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ y un número real $\vartheta \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$, tal que $g = \mathrm{Exp}(\vartheta X)$. Luego, $r = 1$. El lector debe poder deducir una relación explícita entre los ángulos de Euler por un lado y la dirección X y el ángulo ϑ por otro, dado que para un mismo $g \in SO_3$,

$$\mathrm{Exp}(\theta J_3)\,\mathrm{Exp}(\phi J_2)\,\mathrm{Exp}(\psi J_3) = \mathrm{Exp}(\vartheta X)$$

La pregunta de este ejercicio — cuando se hace en general para alguno de los grupos G_B — puede entonces afinarse un poco más: ¿existe una vecindad $U \subset \mathfrak{g}_{_B}$ del origen y una aplicación $C : U \times U \to \mathfrak{g}_{_B}$, tal que

$$\mathrm{Exp}(X)\ \mathrm{Exp}(Y) = \mathrm{Exp}\big(\,C(X,Y)\,\big), \qquad \text{para todos } X, Y \in U?.$$

En tal caso, la proposición anterior implicaría rápidamente que r es exactamente igual a 1 para elementos g en una vecindad de la identidad $e \in G_B$. Pero la respuesta a esta última pregunta es: SI. Y conocer $C(X,Y)$ a partir de X y Y se conoce como *la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.* (Véase [He]).

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior y el lema previo, es el siguiente resultado:

3. Corolario. *La representación Ad está completamente determinada sobre la componente de la identidad $(G_B)_e$, por la representación ad. De hecho,*

$$Ad\big(\mathrm{Exp}(X)\big) = \mathrm{Exp}\big(ad(X)\big)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}l(V)$.

3.13 Ad-invariancia de la forma de Cartan-Killing.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Ya se ha señalado que la forma de Cartan-Killing $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ definida por $\kappa(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)\big)$ es invariante ante cualquier automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. En particular, $\mathrm{Ad}(g)$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}l(V)$ para cada $g \in \mathrm{GL}(V)$, así que para la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}l(V)$ tenemos,

$$\kappa(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = \kappa(X,Y).$$

Exactamente lo mismo se cumple para $g \in G_B$, $X, Y \in \mathfrak{g}_{_B}$ y la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}_{_B}$. De hecho, usando la notación G_κ introducida en 2.1 para el subgrupo de isotropía en la forma bilineal κ, es fácil ver que,

$$\mathrm{Ad}(G_B) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_{_B}) \subset G_\kappa = \{\psi\colon \mathfrak{g}_{_B} \to \mathfrak{g}_{_B} \mid \kappa\big(\psi(X), \psi(Y)\big) = \kappa(X,Y)\,\}.$$

En particular, podemos considerar una curva $t \mapsto g(t) \in G_B$ definida en el intervalo $(\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, tal que $g(0) = \mathbb{1}$ (e.g., $g(t) = \mathrm{Exp}(t\,Z)$, con $Z \in \mathfrak{g}_{_B}$), así que derivando con respecto a t ambos miembros de $\kappa(\mathrm{Ad}(g(t))X, \mathrm{Ad}(g(t))Y) = \kappa(X,Y)$ y evaluando despues en $t = 0$, se obtiene, $\kappa([Z,X],Y) + \kappa(X,[Z,Y]) = 0$. Es decir,

$$\kappa([X,Y],Z) = \kappa(X,[Y,Z])$$

para toda terna X, Y, Z en el álgebra de Lie.

1. Ejemplo. Sea $G = U_2$. Como hemos visto,

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\Delta\bar{b} & \Delta\bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, |a|^2 + |b|^2 = 1 \ , \ |\Delta|^2 = 1 \right\}$$

y de manera directa se comprueba que su álgebra de Lie, $\mathfrak{u}_2$, consiste precisamente de las combinaciones lineales *con coeficientes reales* de los elementos,

$$H_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

De hecho, estos generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{u}_2$ dan lugar a los subgrupos uniparamétricos,

$$\begin{aligned} t \mapsto \operatorname{Exp}(tH_\Delta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} & \qquad t \mapsto \operatorname{Exp}(tH_0) &= \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \\ t \mapsto \operatorname{Exp}(tH_1) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} & \qquad t \mapsto \operatorname{Exp}(tH_2) &= \begin{pmatrix} \cos t & -i\sin t \\ -i\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que un subgrupo abeliano y conexo de U_2 es,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \Delta\bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, |a|^2 = 1 \ , \ |\Delta|^2 = 1 \right\}.$$

Obsérvese también que la aplicación exponencial, restringida al subespacio $\mathfrak{t} = \mathbb{R}\, H_\Delta + \mathbb{R}\, H_0 \subset \mathfrak{u}_2$, produce un epimorfismo de grupos abelianos, cuyo kernel es el subgrupo discreto de $\mathbb{R}^2$ dado por,

$$\operatorname{Ker}\big(\operatorname{Exp}|_{\mathfrak{t}}\big) = \{2\pi m\, H_0 + 2\pi n\, H_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La representación ad, en términos de la base H_Δ, H_0, H_1 y H_2 está dada como sigue:

$$\operatorname{ad}(H_\Delta) : \begin{cases} H_\Delta \mapsto 0 \\ H_0 \mapsto 0 \\ H_1 \mapsto -H_2 \\ H_2 \mapsto H_1 \end{cases} \qquad \operatorname{ad}(H_0) : \begin{cases} H_\Delta \mapsto 0 \\ H_0 \mapsto 0 \\ H_1 \mapsto 2H_2 \\ H_2 \mapsto -2H_1 \end{cases}$$

$$\operatorname{ad}(H_1) : \begin{cases} H_\Delta \mapsto H_2 \\ H_0 \mapsto -2H_2 \\ H_1 \mapsto 0 \\ H_2 \mapsto 2H_0 \end{cases} \qquad \operatorname{ad}(H_2) : \begin{cases} H_\Delta \mapsto -H_1 \\ H_0 \mapsto 2H_1 \\ H_1 \mapsto -2H_0 \\ H_2 \mapsto 0. \end{cases}$$

Resulta inmediato entonces escribir las matrices correspondientes a $\mathrm{ad}(H_\Delta)$, $\dots$, $\mathrm{ad}(H_2)$ en esta base y calcular directamente la forma de Cartan-Killing. El lector podrá comprobar que,

$$\kappa = (\ \kappa(H_i, H_j)\ ) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad i, j \in \{\Delta, 0, 1, 2\}.$$

Observar en particular que la restricción de κ al subespacio $\mathfrak{su}_2 = \mathbb{R}\, H_0 + \mathbb{R}\, H_1 + \mathbb{R}\, H_2$ es diagonal y negativa definida. Por contraste, la restricción de κ al subespacio $\mathfrak{t} = \mathbb{R}\, H_\Delta + \mathbb{R}\, H_0$, es degenerada:

$$\kappa_{\mathfrak{t}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det \kappa_{\mathfrak{t}} = 0.$$

Sin embargo, esto no quiere decir que no sea posible definir una forma bilineal, simétrica, no degenerada y Ad-invariante en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}_2$. De hecho, notemos que si

$$B : \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{u}_2 \to \mathbb{R}$$

es una forma bilineal, simétrica y Ad-invariante, entonces debe satisfacer $B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z)$. La demostración es exactamente la misma que la que dimos para probar esta propiedad en la forma de Cartan-Killing, κ. Luego, habrá de ser cierto que,

$$B(H_0, H_0) = \frac{1}{2}\, B([H_1, H_2], H_0) = \frac{1}{2}\, B(H_1, [H_2, H_0]) = B(H_1, H_1).$$

Similarmente,

$$B(H_0, H_0) = -\frac{1}{2}\, B([H_2, H_1], H_0) = -\frac{1}{2}\, B(H_2, [H_1, H_0]) = B(H_2, H_2).$$

Por otra parte,

$$B(H_0, H_1) = \frac{1}{2}\, B([H_1, H_2], H_1) = \frac{1}{2}\, B(H_1, [H_2, H_1]) = -B(H_1, H_0).$$

de manera que $B(H_0, H_1) = 0$. Igualmente,

$$B(H_0, H_2) = \frac{1}{2}\, B([H_1, H_2], H_2) = \frac{1}{2}\, B(H_1, [H_2, H_2]) = 0$$

y

$$B(H_1, H_2) = \frac{1}{2}\, B([H_2, H_0], H_2) = \frac{1}{2}\, B(H_2, [H_0, H_2]) = -B(H_2, H_1)$$

de manera que también $B(H_1, H_2) = 0$. Por lo tanto, sólo queda conocer $B(H_\Delta, H_i)$ y $B(H_\Delta, H_\Delta)$. Pero notemos que,

$$B(H_\Delta, H_0) = \frac{1}{2}\, B(H_\Delta, [H_1, H_2]) = \frac{1}{2}\, B([H_\Delta, H_1], H_2) = -\frac{1}{2}\, B(H_2, H_2).$$

Finalmente,

$$B(H_\Delta, H_1) = B(H_\Delta, [H_\Delta, H_2]) = B([H_\Delta, H_\Delta], H_2) = 0$$

y también, $B(H_\Delta, H_2) = 0$. Todo esto determina la forma general que debe tener una tal B bilineal, simétrica y Ad-invariente en $\mathfrak{u}_2$; a saber,

$$\mathbf{B} = (\ B(H_i, H_j)\ ) = \begin{pmatrix} c & -\frac{b}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{2} & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad i, j \in \{\Delta, 0, 1, 2\}$$

siendo $b = B(H_0, H_0)$ y $c = B(H_\Delta, H_\Delta)$ dos constantes a elegir de manera conveniente. De aquí resulta claro que B puede ser no degenerada si y sólo si, $b(4c - b) \neq 0$.

3.14 Breve introducción al estudio de la geometría.

Vamos a concluir este capítulo abriendo un pequeño espacio para iniciar una discusión muy elemental sobre algunas de las “ideas modernas” que subyacen en el estudio de la geometría. Estas “ideas modernas” constituyen en realidad la herencia fundamental que Felix Klein y Sophus Lie legaron a la humanidad después de sus significativos descubrimientos en la interrelación del álgebra, con la geometría y las ecuaciones diferenciales. Más concretamente, enfocaremos nuestra atención en la geometría analítica elemental donde resulta relativamente sencillo abrir la discusión y ejemplificar unas cuantas de las mencionadas “ideas modernas”. Advertimos al lector, sin embargo, que esta discusión está muy lejos de ser profunda y exhaustiva; sólo se pretende “dar una probadita” del sabor a “geometría e invariantes” en las cuatro subsecciones restantes. En una primera lectura, puede omitirse el material faltante de este capítulo sin sufrir pérdida alguna en la continuidad de la exposición.

3.15 Productos semidirectos.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación de G en V, el *producto semidirecto* de G con V — denotado por $G \ltimes V$ — se define como el conjunto $G \times V$ (producto cartesiano) equipado con la siguiente ley de multiplicación (que lo convierte en un grupo):

$$(h, u) \cdot (g, v) = (hg, \rho(h)v + u).$$

Observar cómo, del segundo factor, se obtiene una acción natural de este grupo en V; a saber, $\widetilde{\rho}\colon (G \ltimes V) \times V \to V$ definida por:

$$\widetilde{\rho}\big(\,(h, u),\, v\,\big) = \rho(h)v + u.$$

Los ejemplos concretos que conviene tener en mente son los que resultan de los casos $n = 2$ y $n = 3$ al tomar $V = \mathbb{R}^n$, $G = SO_n$ y $\rho\colon SO_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ la *representación de* *definición* definida por la inclusión: $\rho(h)(v) = h(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, con $h \in SO_n$ (ésta, para el caso $n = 3$, es equivalente a la representación Ad como ya se ha visto en un ejercicio anterior). A continuación restringiremos la discusión al caso $n = 2$, pero confiamos en que el lector no tendrá dificultad alguna en generalizar las observaciones hechas sobre tal ejemplo.

3.16 La geometría analítica plana.

El grupo SO_2 no actúa transitivamente en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, sino que, como se ha visto en §1, la acción descompone al plano en órbitas que son círculos con centro en el origen y hay tantas órbitas como números reales no negativos (radios). Sin embargo, al considerar el producto semidirecto $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$, la acción $\widetilde{\rho}\colon (SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sí es transitiva (*ie,* consta de una sola órbita). Esto resulta evidente de notar que, $\widetilde{\rho}(\mathbb{1}, u)(v) = v + u$; en otras palabras, la acción del producto semidirecto $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ incluye a todas las translaciones en el plano por restricción al subgrupo $\mathbb{R}^2 \simeq \{(\mathbb{1}, u) \mid u \in \mathbb{R}^2\} \subset SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ y la acción $v \mapsto v + u$ con $u \in \mathbb{R}^2$ es claramente transitiva.

De manera similar, la acción del producto semidirecto $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ incluye a la acción del grupo de rotaciones SO_2, puesto que $\widetilde{\rho}(h, 0)(v) = h(v)$ y $SO_2 \simeq \{(h, 0) \mid h \in SO_2\} \subset SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$. El lector puede demostrar que *cualquier grupo de transformaciones del plano $\mathbb{R}^2$ que contenga todas las rotaciones y todas las translaciones, debe contener al producto semidirecto $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$.*

Continuando con el mismo ejemplo, el lector seguramente recordará de sus cursos elementales de Geometría Analítica que las *propiedades geométricas* no cambian (*i.e.,* permanecen *invariantes*) frente a rotaciones y translaciones del plano. Básicamente, ello es un reflejo del hecho que los sistemas de coordenadas pueden centrarse en cualquier punto y pueden rotarse convenientemente al iniciar la descripción analítica de un problema geométrico.

Las observaciones de los dos últimos párrafos son muy importantes y entre otras cosas implican que es posible pensar que el plano $\mathbb{R}^2$ es un espacio X, donde actúa el grupo $G = SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ transitivamente y el subgrupo de isotropía en un punto dado es únicamente el grupo de rotaciones SO_2. En otras palabras, que es posible identificar al plano $\mathbb{R}^2$ con el espacio X de clases laterales $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2 / SO_2$. Luego, si un objeto geométrico (o un conjunto de objetos geométricos — digamos, una recta, o un conjunto de cónicas, etc.) se describe analíticamente mediante el uso de coordenadas cartesianas, sus propiedades geométricas (*e.g.,* puntos de intersección, ángulos de intersección, etc.) han de expresarse mediante relaciones que permanezcan *invariantes* frente a las transformaciones del grupo $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2 / SO_2$; es decir, frente a translaciones y rotaciones. Esta forma de enfocar la geometría centra *a priori* la importancia en el grupo $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ y recupera *a posteriori* el espacio $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de clases laterales $SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2 / SO_2$.

1. Ejercicio. (1) Sea G el producto semidirecto $\mathrm{GL}(V) \ltimes V$ y considerar el espacio vectorial $V' = V \oplus \mathbb{F}z$ (es decir, V' se obtiene de V aumentándole una dimensión). Sea $\rho\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ la representación de definición (*ie,* el homomorfismo identidad). Observar que la acción $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{GL}(V) \ltimes V$ en V, se puede representar en V' mediante el monomorfismo de grupos,

$$\rho'\colon \mathrm{GL}(V) \ltimes V \hookrightarrow \mathrm{GL}(V'), \qquad \text{donde}, \qquad \rho'(h,u) = \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al identificar $v \in V$ con $\left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in V'$.

(2) Si H es el subgrupo de G que consiste de los elementos $(h,0)$, con $h \in \mathrm{GL}(V)$ y se denota por H' su imagen en $\mathrm{GL}(V')$ bajo ρ', demostrar que existe una biyección,

$$\mathrm{GL}(V')/H' \qquad \longleftrightarrow \qquad V$$

¿Qué ambigüedad hay al definir esta biyección? (Indicación: seguramente se eligió un punto para calcular el subgrupo de isotropía de la acción).

(3) Observar también que el espacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(V) \oplus V$, cuyos elementos escribimos en la forma (S,w), con $S \in \mathfrak{g}l(V)$ y $w \in V$, tiene la estructura de una álgebra de Lie bajo la operación,

$$\begin{aligned}[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon (\mathfrak{g}l(V) \oplus V) \times (\mathfrak{g}l(V) \oplus V) &\to \mathfrak{g}l(V) \oplus V \\ \big((S_1,w_1),(S_2,w_2)\big) &\mapsto \big([S_1,S_2]\,,\, S_1(w_2) - S_2(w_1)\big)\end{aligned}$$

y que la aplicación,

$$\tilde{\rho}'\colon \mathfrak{g}l(V) \oplus V \to \mathfrak{g}l(V'), \qquad \tilde{\rho}'(S,w) = \begin{pmatrix} S & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

define un monomorfismo de álgebras de Lie. Calcular la forma de Cartan-Killing para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(V) \oplus V$. ¿Se puede definir una forma bilineal, simétrica, no degenerada y Ad-invariante en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(V) \oplus V$?

(4) Considerar la restricción de la representación Ad al subgrupo $\rho(G) \subset \mathrm{GL}(V')$ y aplicarla a los elementos de la subálgebra $\tilde{\rho}'(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}l(V')$. Restringir aún más las transformaciones para aplicarlas sólo a la subálgebra $\tilde{\rho}'(\{0\} \oplus V) \subset \tilde{\rho}'(\mathfrak{g})$. ¿Se parece este resultado en algo a la ambigüedad para definir la biyección (2)? ¿Se pueden identificar $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}l(V)$ y V sin ambigüedad?

3.17 El programa "Erlangen".

Quizás, el primer matemático en ponderar y valorar la relevancia geométrica de los grupos de transformaciones fue F. Klein. Puede decirse con toda legitimidad que

Klein es el padre de la geometría fundada sobre la base de la teoría de grupos. Debe decirse también que esto se debe precisamente a su interacción y colaboración con S. Lie en Bonn alrededor de 1870 (véanse [Ba] y [Ha]).

Precisamente, el punto de vista propuesto por Klein en su famosa cátedra de oposición (*Erlangen Programm*) de 1872 es estudiar geometría estudiando *las relaciones que permanecen invariantes frente a las transformaciones de un grupo dado*. En sus propias palabras:

> *Todo método geométrico queda determinado al especificar la variedad X de sus 'elementos' y un grupo G de transformaciones de X que define las relaciones invariantes de la geometría.*

De manera esquemática:

$$\left\{\text{Estudiar Geometría}\right\} \quad = \quad \left\{\begin{array}{c}\text{Estudiar relaciones entre los objetos de} \\ \text{un conjunto } X \text{ que permanecen } \textit{invariantes} \\ \text{frente a transformaciones de un grupo } G\end{array}\right\}.$$

La propuesta de Klein surge precisamente después de haber visto que la teoría de Lie revelaba una estructura geométrica más rica escondida detrás de las ecuaciones diferenciales que Lie pretendía resolver. Al parecer fue Klein quien señaló a Lie la analogía que existía entre sus métodos de resolución de ecuaciones diferenciales y los de Galois para ecuaciones polinomiales (*cf,* [Ha]).

La idea de Klein, en forma simplificada, es la siguiente: supongamos que se parte de un espacio vectorial V con una forma bilineal (o sesquilineal) B simétrica (o antisimétrica) y no degenerada. Estudiar la geometría definida por B en V consiste en determinar todas las *cantidades invariantes* del producto semidirecto $G_B(V) \ltimes V$ con respecto a la representación $\widetilde{\rho}$ de la sección anterior. Esto obliga, naturalmente, a resolver el problema de *encontrar todas las cantidades invariantes*.

3.18 Cantidades invariantes.

Vamos a suponer que $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación y que $f\colon V \to \mathbb{R}$ es una función. Decimos que f *es G-invariante* (bajo la acción definida por ρ), si $f \circ \rho(g) = f$ para todo $g \in G$. Es decir, si f toma un valor constante sobre cada órbita. **Ejemplo:** Considerar la acción natural de SO_2 en $\mathbb{R}^2$. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ es SO_2-invariante como el lector comprobará fácilmente.

Conviene señalar que, en general, no hay muchas funciones invariantes. El caso más sencillo de tratar es el de determinar las *funciones polinomiales G-invariantes*. Tras un momento de reflexión el lector se convencerá de que esto equivale a determinar las funciones lineales $f\colon V \to \mathbb{R}$ que son G-invariantes; las funciones bilineales simétricas $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ que son G-invariantes (en el sentido de que $f(\rho(g)u, \rho(g)v) = f(u, v)$, para todos $u, v \in V$); las funciones trilineales simétricas $f: V \times V \times V \to \mathbb{R}$ que son G-invariantes; etc. Para algunos grupos, algunos espacios vectoriales y algunas representaciones específicas pueden proporcionarse de manera muy concreta y muy sencilla todas las funciones multilineales simétricas G-invariantes; esto es, todos los *polinomios G-invariantes*. Por ejemplo, si $G = G_{B}$ es alguno de los grupos clásicos, actuando sobre su álgebra de Lie $V = \mathfrak{g}_{B}$ según la representación $\rho = \mathrm{Ad}$, se obtiene el siguiente resultado (una demostración puede encontrarse en [Sp]):

1. Teorema. *(1) Defínanse las funciones polinomiales $f_i: \mathfrak{u}_n \to \mathbb{C}$ ($i = 1, \ldots, n$), mediante la expresión,*

$$\det(\lambda \mathbb{1} - X) = \lambda^n - f_1(X)\lambda + f_2(X)\lambda^2 - \cdots + (-1)^n f_n(X), \qquad X \in \mathfrak{u}_n .$$

Entonces, cualquier función polinomial P que sea U_n-invariante respecto a la representación $Ad: U_n \to \mathrm{GL}(\mathfrak{u}_n)$, se puede escribir como una combinación lineal de las f_i's en la forma,

$$P = \sum c_{i_1 \cdots i_s} f_{i_1} \cdots f_{i_s}, \qquad c_{i_1 \cdots i_s} \in \mathbb{C}.$$

Además, ninguna de las f_i's puede escribirse así en términos de las restantes. Se dice entonces que las funciones f_i son algebraicamente independientes y generan el álgebra de polinomios $Ad(U_n)$-invariantes en $\mathfrak{u}_n$.

(2) Defínanse las funciones polinomiales $f_i: \mathfrak{o}_n \to \mathbb{C}$ ($i = 1, \ldots, m$), mediante la expresión,

$$\det(\lambda \mathbb{1} - X) = \lambda^n - f_1(X)\lambda^2 + f_2(X)\lambda^4 - \cdots + (-1)^n f_m(X), \qquad X \in \mathfrak{o}_n$$

siendo $n = 2m$ o $n = 2m + 1$. Entonces, las funciones f_i son algebraicamente independientes y generan el álgebra de polinomios $Ad(O_n)$-invariantes en $\mathfrak{o}_n$.

2. Nota. Un resultado análogo vale también para los grupos simplécticos. La "parte sencilla" de este teorema consiste en verificar que las funciones f_i son polinomios $\mathrm{Ad}(G)$-invariantes. En efecto, $\det(\lambda \mathbb{1} - X) = \det\big(g\,(\lambda \mathbb{1} - X)\,g^{-1}\big) = \det(\lambda \mathbb{1} - g\,X\,g^{-1})$ y el determinante es una función polinomial. La "parte difícil" consiste en ver que las funciones f_i generan todas las funciones polinomiales $\mathrm{Ad}(G)$-invariantes (véase [KN], Pp. 300-304). El punto importante, sin embargo, es que en estos casos es posible decir de manera muy precisa cómo son *todas* las funciones polinomiales invariantes.

3. Ejercicio. (1) Considerar el producto semidirecto $G = SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$ y la representación $\rho': G \to \mathbb{R}^3$ discutida en el ejercicio anterior. Hay una representación de G en el espacio vectorial $\mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})$ de todas las *matrices simétricas* de 3×3:

$$\nu: G \to \mathrm{GL}\big(\mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})\big) \qquad \nu(g)(S) = \rho'(g)\,S\,\rho'(g)^t$$

siendo $\rho'(g) = \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de 3×3 correspondiente al elemento $g = (h, u) \in SO_2 \ltimes \mathbb{R}^2$, con $h \in SO_2$ y $u \in \mathbb{R}^2$ y $S \in \mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})$. Escribir, $S = \begin{pmatrix} D & w \\ w^t & 2f \end{pmatrix}$, con $D = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \in \mathrm{Sim}_2(\mathbb{R})$, $w = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Demostrar que el álgebra de polinomios invariantes está generada en este caso por,

$$\tau = \mathrm{Tr}\ S, \qquad \delta = \det\ D, \qquad \Delta = \det\ S$$

que son polinomios de grados uno, dos y tres, respectivamente.

(2) Identificar la matriz $S \in \mathrm{Sim}_3(\mathbb{R})$ con la cónica

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 2(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0$$

y comprobar que se puede caracterizar su naturaleza en términos de relaciones G-invariantes (*e.g.,* se puede decir si se trata de una elipse, de una parábola, o de una hipérbola, etc.):

	$\delta > 0$	$\delta = 0$	$\delta < 0$
$\Delta \neq 0$	Elipse	Parábola	Hipérbola
$\Delta = 0$	Un punto	Dos rectas	Dos rectas

SEGUNDA PARTE
Geometría de Grupos de Lie

4. INTRODUCCIÓN

Si pidiéramos al lector imaginar (la 2-variedad diferenciable que conocemos como) la esfera S^2, muy probablemente la imagen que se formaría en su mente sería la de una naranja perfectamente redonda; i.e. la esfera de radio r y centro en el origen en $\mathbb{R}^3$, $S_r(O)$; aún cuando igualmente válido (desde el punto de vista de la topología diferencial) hubiese sido una imagen mental de algo parecido a un plátano, un aguacate, jitomate, mamey o hasta una papa chipotuda. Esto es porque de manera natural e inconsciente le asociamos a S^2 una geometría privilegiada.

Hemos escogido una esfera que no cambia ante nuestros ojos cuando la movemos por un elemento de $SO_3(\mathbb{R})$. Es cierto que podríamos hacer actuar a $SO_3(\mathbb{R})$ sobre la papa, simplemente transplantando la acción mediante el difeomorfismo entre $S_r(O)$ y la papa. Sin embargo a esta acción le falta un ingrediente importante: no preserva la distancia entre puntos sobre la superficie de la papa; esto es, **la acción de $SO_3(\mathbb{R})$ sobre la papa así definida no es por isometrías.**

Ahora tendremos ocasión de conocer variedades diferenciales, como la papa, que admiten grupos de Lie transitivos de difeomorfismos. Estudiaremos geometrías que conviertan a estos objetos en espacios atractivos por su simetría y redondez. La parte final de estas notas se desarrolla siguiendo algunos de los ejemplos más conocidos e importantes de variedades riemannianas con grupo de isometría transitivo; en especial veremos métricas distinguidas, y algunos de sus invariantes (*e.g.,* geodésicas y curvaturas) en esferas, en el espacio proyectivo complejo, en el espacio hiperbólico real y en el espacio $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$.

4.1 Espacios Homogéneos.

1. Definición. Sea G un grupo de Lie conexo, H un subgrupo cerrado. G/H es el conjunto de clases laterales $\{gH\}$, $\pi : G \to G/H$ la proyección $g \mapsto [g] = gH$. A G/H se le llama *espacio homogéneo.*

2. Teorema [Bo] p.165. *G/H admite una estructura única de variedad diferenciable para la cual*

- *$\pi : G \to G/H$ es una fibración suave; i.e. π es C^∞ y todo punto $[g] \in G/H$ tiene una vecindad U tal que $\pi^{-1}U \simeq U \times H$.*

- *Todo $g \in G$ está en la imagen de una sección local C^∞ $\sigma : U \subset G/H \to G$.*

Esbozo de la demostración. A G/H se le da la topología cociente. G queda partido en la unión de clases gH. Sea $n = \dim H$ y $N = \dim G$.

Todo punto $g_0 \in G$ admite una vecindad V homeomorfa a un cubo

$$\{(x_1, \ldots, x_N) \mid |x_j| < \epsilon\}$$

de $\mathbb{R}^N$ (G es una N-variedad) con la propiedad de que la intersección de V con una clase gH es un subconjunto de la forma $x_1 =$constante, …, $x_{N-n} =$constante; i.e. V está formada por rebanadas “verticales” las cuales son subconjuntos de las clases gH.

Puede escogerse V suficientemente pequeña para que cada rebanada pertenezca a distintas clases gH. De esta forma, π proyecta homeomorfamente al conjunto $x_{N-n+1} = x_{N-n+2} = \cdots = x_N = 0$ (que es homeomorfo a $\mathbb{R}^{N-n}$) sobre una vecindad de $[g_0]$. Se definen secciones como en el enunciado tomando π^{-1} restringida a la imagen de V. No es difícil ahora comprobar que las funciones de transición son C^∞. Unicidad también sigue sin mucha dificultad. $\square$

De este resultado se puede concluir que si $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ son las álgebras de Lie de G y H respectivamente, entonces podemos identificar el espacio tangente a G/H en $[e]$ con $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; en particular $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

En la sección de ejemplos haremos uso del siguiente resultado.

3. Lema. *G un grupo de Lie conexo, H un subgrupo de G. Si $\dim H = \dim G$ entonces $G = H$.*

Demostración. La inclusión $H \hookrightarrow G$ es una inmersión, y como las dimensiones son las mismas implica que H es un abierto de G. Sea $h_n \to g$ una sucesión en H que converge a $g \in G$. La sucesión $\{g^{-1}h_n\}$ es una sucesión que converge a la identidad. Existe una vecindad abierta de la identidad completamente contenida en H, por lo tanto casi todos los elementos de la sucesión $\{g^{-1}h_n\}$ están en H; tomemos uno, $g^{-1}h_N$, si este elemento está en H entonces también lo está g^{-1}. Por lo tanto H es cerrado. Como G es conexo, $H = G$. $\square$

4.2 Los ejemplos

1. Un contraejemplo.

$G = S^1 \times S^1$, $H = \left\{(e^{it}, e^{it\sqrt{2}}) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ (H es un subgrupo uniparamétrico de G). Nota que H no es cerrado en G, de hecho es denso en él. Además

$$G/H \simeq \left\{\left(1, e^{i(\sqrt{2}-1)t)}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

no es Hausdorff.

2. G COMO ESPACIO HOMOGÉNEO.

G un grupo de Lie cualquiera, $H = e$ entonces $G/H \simeq G$. Todo grupo de Lie es trivialmente un espacio homogéneo.

Para entender a qué espacio homogéneo uno se refiere no basta con dar un par de grupos y decir que se toma el cociente. Es necesario que explicitemos la relación de subgrupo que hay entre ellos. Más aún, quisiéramos conocer a fondo la estructura de variedad que posee. Para esto, el siguiente resultado nos será muy útil.

3. TEOREMA. *M una variedad C^∞, G un grupo de Lie conexo que actúa transitivamente por difeomorfismos en M. Fijemos $x \in M$ y consideremos el subgrupo de isotropía $H = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. Entonces M y G/H son difeomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi : G \to M$ la aplicación $g \mapsto g \cdot x$. Φ es diferenciable y factoriza através de G/H a una aplicación, también diferenciable, f; i.e. $f : G/H \to M$, $[g] \mapsto g \cdot x$. Como la acción de G es transitiva, esto implica que f es sobre. El Lema de Sard implica entonces que existe al menos un punto regular de f en G/H. Como la derivada de f en dos puntos distintos difiere por un difeomorfismo, vemos que f es regular en todos los puntos de G/H. Así f es sobre, biyectiva y abierta, por lo tanto un difeomorfismo. $\square$

4. ESFERAS.

$G = SO_{n+1}(\mathbb{R})$ $n \geq 2$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in SO_n(\mathbb{R}) \right\}$. G/H es difeomorfo a la esfera S^n. Basta comprobar que G actúa transitivamente sobre la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ y que el subgrupo de isotropía de $(1, 0, \dots, 0)$ es H; el resultado se sigue aplicando el Teorema 4.2.3.[1]

5. EL SEMIPLANO SUPERIOR.

$G = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$, $H = SO_2(\mathbb{R})$. G actúa en el semiplano superior $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$cz + d = cx + d + icy$, por lo tanto si $cz + d = 0$ entonces $c = 0$ y $d = 0$ lo cual es imposible ya que la matriz es invertible. Además, un cálculo sencillo demuestra que la parte imaginaria de $\frac{az+b}{cz+d}$ es $\frac{1}{\|cz+d\|^2}$ y por tanto positiva. Esto comprueba que realmente G actúa en $\mathcal{H}$.

[1] 4.2.3 denota el enunciado correspondiente al inciso 3. (en este caso un teorema) de la sección 4.2 (segunda del capítulo cuarto); una referencia del tipo 7.0.1 correspondería a un enunciado que aparece en el capítulo 7 pero anterior al inicio de la primera sección, la 7.1, de dicho capítulo.

Para probar que la acción es transitiva basta ver que dado cualquier $z \in \mathcal{H}$ existe un elemento $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g \cdot i = z$. Consideremos $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ entonces $g \cdot i = a^2 i + ab$; es claro que si $z = x + iy$ podemos tomar $a = \sqrt{y}$ y $b = x/a$. Calculemos finalmente la isotropía en i. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = i$ entonces $ai + b = di - c$, por lo tanto $a = d$ y $b = -c$. El grupo de isotropía es $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$ el cual es isomorfo a $SO_2(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\mathcal{H} \simeq SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}).$$

6. La fibración de Hopf.

Hemos visto en 2.5 que $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\}$, identificado como los cuaterniones unitarios, es un grupo de Lie.

Ahora, S^3 actúa en $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ como sigue: $x \in S^3$, $0 \neq (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ entonces $x \cdot [z_1, z_2] = [x \cdot (z_1, z_2)]$ donde el último producto es el de cuaterniones.

Esta acción es transitiva: dado $Z \neq 0$ en $\mathbb{C}^2$, escogemos $x = Z/\|Z\| \in S^3$ el cual satisface que $x^{-1} \cdot [Z] = [1, 0]$.

La isotropía: $x \cdot [1, 0] = [1, 0]$ implica que $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. En símbolos

$$K_{[1,0]} = \{x = x_0 + ix_1 \mid \|x\| = 1\} \simeq S^1$$

i.e.

$$S^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq S^3/S^1 \simeq SU_2/U_1.$$

7. Más esferas de dimensión impar.

$G = U_2$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq U_1$. Recordamos que

$$U_2 = \left\{ e^{i\theta} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ \|a\|^2 + \|b\|^2 = 1 \right\}.$$

U_2 actúa en $\mathbb{C}^2$ dejando invariante la forma hermitiana estandar, luego también actúa en la esfera unitaria S^3. Dado $(z, w) \in S^3$ ($\|z\|^2 + \|w\|^2 = 1$) sea $u = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$; u pertenece a U_2 y $u \cdot (1, 0) = (z, w)$, $\Rightarrow U_2$ actúa transitivamente en S^3.

Si $g = e^{i\theta} \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ fija a $(1, 0)$ entonces $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\theta} \end{pmatrix}$. Por lo tanto el grupo de isotropía en $(1, 0)$ es isomorfo a U_1. En conclusión

$$U_2/U_1 \simeq S^3$$

Un argumento análogo prueba que en general $U_n/U_{n-1} \simeq S^{2n-1}$. Nota que el mismo argumento prueba también que $SU_n/SU_{n-1} \simeq S^{2n-1}$.

8. El espacio de los lagrangianos en $\mathbb{C}^2$.

Consideremos en $\mathbb{R}^4$ la forma bilineal $\omega(X,Y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$, $X = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ y $Y = (y_1,y_2,y_3,y_4)$. Un subespacio vectorial $V \subset \mathbb{R}^4$ es *lagrangiano* si $\omega(u,v) = 0$ para toda $u,v \in V$, y V es máximo con esta propiedad. Lo siguiente puede verificarse:

• $V_0 = \{(x_1, 0, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ es lagrangiano.

• U_2 actuando en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ mediante la multiplicación, actúa transitivamente en el conjunto $\mathcal{L}$ de todos los lagrangianos.

• La isotropía en V_0 es el grupo $SO_2(\mathbb{R})$.

Vemos que el espacio de los lagrangianos tiene una representación como espacio homogéneo $\mathcal{L} = U_2/SO_2(\mathbb{R})$.

El grupo U_2 actúa en $S^2 \times S^1$ de la siguiente forma (recuerda que $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$): si $U \in U_2$ y $(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \lambda) \in \mathbb{CP}^1 \times S^1$ entonces

$$U \cdot (\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \lambda) = \left(\left[U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right], \det U \cdot \lambda \right).$$

No es dificil comprobar que esta acción es transitiva. Calculemos el subgrupo de isotropía correspondiente al punto $(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, 1)$. Si $U \in U_2$ fija este punto, en primer lugar se tiene que $\det U = 1$, luego U es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Además, de

$$\begin{pmatrix} a + ib \\ -\bar{b} + i\bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

se sigue que $a = \frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2} = \mathrm{Re}(\lambda)$, $b = \frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2i} = \mathrm{Im}(\lambda)$. Por lo tanto el subgrupo de isotropía en este caso es el grupo $SO_2(\mathbb{R})$. Vemos así que el espacio $\mathcal{L}$ de lagrangianos en $\mathbb{C}^2$ es difeomorfo a $S^2 \times S^1$. Observa que escogiendo como punto fijo al $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 1)$, se obtiene una representación de $\mathcal{L}$ como U_2/H con $H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \mid |\lambda| = 1 \right\} \simeq U_1$.

9. Ojo. *En los dos ejemplos anteriores el espacio homogéneo como conjunto es el mismo (a saber, U_2/U_1); sin embargo las topologías en ambos casos son muy distintas. S^3 y $S^2 \times S^1$ no son homeomorfos. Esta diferencia se debe a las dos inclusiones $U(1) \hookrightarrow U(2)$: $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ y $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$.*

10. El espacio de los elipsoides de volumen fijo, $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ (o en general $SL_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$).

Definimos $X = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A^t = A,\ \det A = 1,\ A > 0\}$ donde $A > 0$ significa que A es positiva definida. X es el espacio de los elipsoides de volumen 1.

$SL_3(\mathbb{R})$ actúa en X: $g \cdot A = B = gAg^t$, ya que $B^t = gA^tg^t = B$, $\det B = (\det g)^2 \det A = 1$ y claramente $B > 0$. Ahora, para una matriz simétrica y positiva, el teorema de Sylvester (que generaliza lo visto en 1.12) nos dice que existe $g \in SO_3(\mathbb{R})$ tal que

$$gAg^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde λ_j son los eigenvalores de A ($\lambda_j > 0$, $\Pi\lambda_j = 1$).

Sea $h = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & \\ & 1/\sqrt{\lambda_2} & \\ & & 1/\sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}$, h está en $SL_3(\mathbb{R})$ y $hgAg^th^t = I$. Por lo tanto la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ es transitiva.

Si $gIg^t = I$ entonces $g \in O_3(\mathbb{R}) \bigcap SL_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R})$. Así

$$SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R}) \simeq X.$$

11. $SO^+_{3,1}(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$. .

Consideremos en $\mathbb{R}^4$ la forma cuadrática

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

La matriz asociada a q es $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. El grupo $SO_{3,1}(\mathbb{R})$ se define como

$$SO_{3,1}(\mathbb{R}) = \{g \in SL_4(\mathbb{R}) \mid g^t\mathbf{B}g = \mathbf{B}\},$$

i.e. como las matrices que preservan la forma q.

Sea $\mathcal{H}^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid q(x_0, x_1, x_2, x_3) = -1 \text{ y } x_0 > 0\}$; $\mathcal{H}^3$ es una de las dos ramas del hiperboloide $q^{-1}(-1)$. Definimos $SO^+_{3,1}(\mathbb{R})$ como las matrices en $SO_{3,1}(\mathbb{R})$ que preservan a $\mathcal{H}$; i.e. aquellas matrices (g_{ij}) tales que $g_{11} > 0$.

Tomemos $x \in \mathcal{H}$, y observemos que q restringida al q-complemento ortogonal de x es positiva. Elige una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ para $x^\perp$, entonces la matriz g cuyas columnas son x, v_1, v_2, v_3 pertenece a $SO^+_{3,1}(\mathbb{R})$ y manda a $(1,0,0,0)$ en x. Por lo tanto la acción de $SO^+_{3,1}(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{H}$ es transitiva.

Sea $H = \{g \in SO^+_{3,1}(\mathbb{R}) \mid g \cdot (1,0,0,0) = (1,0,0,0)\}$. Si $h \in H$ entonces $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ con k alguna matriz de 3×3. Ahora,

$$\mathbf{B} = h^t \mathbf{B} h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k^t k \end{pmatrix}$$

por lo tanto $k^t k = \mathbb{1} \Rightarrow k \in O_3(\mathbb{R})$ y como $\det k = \det h = 1$, $k \in SO_3(\mathbb{R})$. Tenemos entonces que $\mathcal{H}^3 \simeq SO^+_{3,1}(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$.

12. Ojo. *Veremos más adelante (6.4.1) que este espacio homogéneo dotado de una métrica natural es lo que se conoce como el espacio hiperbólico real de dimensión tres. En general el espacio hiperbólico n-dimensional puede construirse en base a $SO^+_{n,1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.*

13. El plano proyectivo complejo.

$\mathbb{CP}^2 = \{l \mid \ l \subset \mathbb{C}^3$ es una recta compleja por el origen$\}$ es el plano proyectivo complejo. El grupo SU_3 actúa en él; la acción de SU_3 en $\mathbb{C}^3$ induce una acción en el proyectivo. Esta acción es transitiva: dada una recta $l = \mathbb{C} \cdot z$ con z unitario, basta completar $\{z\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$, esta base nos da la matriz que lleva a $\mathbb{C} \cdot (1,0,0)$ en l.

Se calcula fácilmente que el grupo de isotropía de $\mathbb{C} \cdot (1,0,0)$ es el grupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \ , \ V \in U_2 \ \text{ y } \ \lambda \cdot \det V = 1 \right\}.$$

Este grupo se denota por $S(U_1 \times U_2)$. Es fácil ver que $V \mapsto \begin{pmatrix} (\det V)^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ nos dá un isomorfismo entre este grupo y U_2.

Por lo tanto,

$$\mathbb{CP}^2 \simeq SU_3/U_2.$$

14. Cubiertas.

Si G es un grupo de Lie y Γ es un subgrupo discreto (i.e. $\forall \gamma \in \Gamma$ existe una vecindad V de γ en G tal que $V \bigcap \Gamma = \{\gamma\}$), entonces en particular Γ es cerrado y G/Γ es un espacio homogéneo. En este caso $\pi : G \to G/\Gamma$ es una aplicación cubriente (en particular un difeomorfismo local).

Por ejemplo: $G = \mathbb{R}^n$ y $\Gamma = \mathbb{Z}^n$; $G = SL_n(\mathbb{R})$ y $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$; etc.

15. El espacio de las estructuras complejas ortogonales en $\mathbb{R}^4$.

Considera $\mathbb{R}^4$ con su producto interior usual. Una *estructura compleja ortogonal (ECO)* en $\mathbb{R}^4$ es una transformación lineal $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisface

- $J^2 = -\mathbb{1}$
- $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ para todo $X, Y \in \mathbb{R}^4$.

Por ejemplo, $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una ECO. Observa que $-J_0$ también lo es. La segunda condición nos dice que J es ortogonal, i.e. $J^tJ = \mathbb{1}$.

Si $P \in SO_4(\mathbb{R})$ entonces $J = P^tJ_0P$ es otra ECO. Más aun, esta acción de $SO_4(\mathbb{R})$ es transitiva sobre el conjunto de ECOs (más precisamente, es transitiva sobre la componente conexa de las ECOs que contiene a J_0). Una forma de convencerse de este hecho es la siguiente. Toda ECO J es antisimétrica ($J^t = -J$), y sus eigenvalores son $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, ambos con multiplicidad dos (es fácil comprobar que los espacios $E_\pm = \{X \pm \sqrt{-1}JX \mid X \in \mathbb{R}^4\}$ son sus eigenespacios). Luego, la forma canónica de J (sobre $\mathbb{R}$) es precisamente J_0.

El subgrupo de isotropía en el punto J_0 es (casi por definición) el grupo U_2:

$$U_2 \simeq \{P \in SO_4(\mathbb{R}) \mid PJ_0 = J_0P\}$$

Así, el espacio de las ECO es el espacio homogéneo $SO_4(\mathbb{R})/U_2$. A continuación veremos que este espacio homogéneo es simplemente la esfera S^2.

Miremos el espacio vectorial $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$; este es un espacio vectorial de dimensión 6, lo cual se comprueba verificando que $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ es una base de él siempre que $\{e_i\}$ lo sea de $\mathbb{R}^4$. Más aun, podemos introducir un producto interior en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ declarando ortonormal a $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ para alguna base ortonormal $\{e_i\}$.

$SO_4(\mathbb{R})$ actúa en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ de la siguiente manera: si $g \in SO_4(\mathbb{R})$ se define $g \cdot (u \wedge v) = gu \wedge gv$ y se extiende linealmente esta acción al elemento general de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$. Bajo la identificación de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \simeq \mathfrak{so}_4$, esta acción no es otra cosa que la acción adjunta de $SO_4(\mathbb{R})$ en su álgebra de Lie $\mathfrak{so}_4$.

Si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es una base orientada y ortonormal de $\mathbb{R}^4$, se define un endomorfismo $*$ de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ como sigue: $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$ de tal suerte que $e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$.

Es fácil ver que $*^2 = \mathbb{1}_{\bigwedge^2 \mathbb{R}^4}$, que $*$ es simétrica y ortogonal, y que 1 y -1 son sus eigenvalores. Sean $\bigwedge_+ = \{\xi \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \mid *\,\xi = \xi\}$ y $\bigwedge_- = \{\xi \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \mid *\,\xi = -\xi\}$. Ambos eigenespacios tienen dimensión tres.

- La acción de $SO_4(\mathbb{R})$ en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ conmuta con $*$, por lo tanto $SO_4(\mathbb{R})$ actúa en

$\bigwedge_+$.

• Sea S^2 la esfera unidad en $\bigwedge_+$, $SO_4(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en esta esfera.

• Si $\omega = (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)/\sqrt{2} \in S^2$, sea $K = \{g \in SO_4(\mathbb{R}) \mid g \cdot \omega = \omega\}$ el subgrupo de isotropía en ω. Sabemos de antemano que $\dim K = 4$.

• Nota que J pertenece a $SO_4(\mathbb{R})$ (de hecho, $J \in U_2$) y por tanto determina un endomorfismo $\hat{J}$ de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ como se explicó arriba. Este endomorfismo satisface $\hat{J}^2 = I$; denotemos por E_+ y E_- los eigenspacios de $\hat{J}$ correspondientes a 1 y -1 respectivamente.

• La relación entre estos dos pares de eigenespacios es la siguiente:

$$E_+ = \langle \omega \rangle \bigoplus \bigwedge\nolimits_- \qquad \bigwedge\nolimits_+ = \langle \omega \rangle \bigoplus E_-$$

En particular $E_+ \bigcap \bigwedge_+ = \langle \omega \rangle$.

• Sea $g \in U_2$ entonces g deja invariante a E_+, y por lo tanto deja invariante a la intersección $E_+ \bigcap \bigwedge_+$. Como además preserva normas, se tiene que $g \cdot \omega = \pm\omega$.

• Esto nos da una aplicación continua $U_2 \to \{\omega, -\omega\}$, $g \mapsto g \cdot \omega$, que, por lo tanto, debe ser constante. Así vemos que para toda $g \in U_2$, $g \cdot \omega = \omega$; i.e. $U_2 \subset K$.

• $\dim U_2 = 4 = \dim K$. Para ver que K es conexo basta observar la sucesión de homotopía de la fibración

$$\cdots \to \pi_1(S^2) \to \pi_0(K) \to \pi_0(SO_4(\mathbb{R})) \to \cdots$$

y recordar que $SO_4(\mathbb{R})$ es conexo y que S^2 es simplemente conexo.

• El lema 5.1 nos dice que $K = U_2$ y por lo tanto que $S^2 \simeq SO_4(\mathbb{R})/U_2$. $\square$

Hemos visto en estos ejemplos que algunas variedades se pueden representar de más de una forma como espacio homogéneo. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ como variedad es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ mismo (visto como grupo de Lie abeliano), a $SO^+_{n,1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$, a $SU_{m,1}/U_m$ (ver sección de Ejercicios a continuación) si $n = 2m$, a $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ ($n = 5$), al grupo de Heisenberg (que se definirá en 5.2.1) si $n = 3$, etc.; y también vimos distintas representaciones de la esfera. Veremos la importancia de conocer distintas representaciones de una misma variedad durante las siguientes secciones cuando estudiemos la geometría de los espacios homogéneos.

4.3 Ejercicios

1. Prueba que $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en la esfera unidad de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Prueba que $SO^+_{3,1}(\mathbb{R})$ es un subgrupo de $SO_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. (*El espacio hiperbólico complejo*) En $\mathbb{C}^{n+1}$ define la forma hermitiana

$$q(z_0, z_1, \dots , z_n) = -z_0\bar{z_0} + z_1\bar{z_1} + \cdots + z_n\bar{z_n},$$

cuya matriz en la base canónica es $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$. Definimos el grupo

$$SU_{n,1} = \{A \in SL_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^t\mathbf{B}A = \mathbf{B}\}.$$

Demuestra lo siguiente:

i. La acción natural de $SU_{n,1}$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ (multiplicación matricial) induce una acción de este grupo en

$$\mathbb{CP}^n = \{l \mid \ l \text{ es una recta compleja por el origen en } \mathbb{C}^{n+1}\}.$$

ii. Dada una recta l, el signo de q en ella es constante, i.e. prueba que si z y w (ambos distintos de cero) están en la misma recta entonces $q(z) = rq(w)$ con r real y positivo. Exhibe tres rectas donde q sea positiva, negativa y cero respectivamente.

iii. Sea $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \{l \in \mathbb{CP}^n \mid q(l) < 0\}$. Prueba que $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ es difeomorfo a la bola unidad abierta en $\mathbb{C}^n$ (sugerencia: prueba que $[z_0, \dots , z_n] \mapsto (\frac{z_1}{z_0}, \dots , \frac{z_n}{z_0})$ es difeomorfismo).

iv. Prueba que $SU_{n,1}$ actúa transitivamente en $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

v. Calcula el subgrupo de isotropía en el punto $[1, 0, \dots , 0]$. Comprueba que es isomorfo a

$$S(U_1 \times U_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \ , \ V \in U(n) \ \text{ y } \ \lambda \det V = 1 \right\}$$

Prueba que este grupo es isomorfo a U_n.

vi. Concluye que $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \simeq SU_{n,1}/U_n$. Este es el espacio homogéneo que da lugar al espacio hiperbólico complejo de dimensión compleja n.

5. MÉTRICAS RIEMANNIANAS

1. Definición. Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M es un producto interior $\langle , \rangle_p$ en cada espacio tangente T_pM, que varía diferenciablemente con p.

Por ejemplo, supongamos que la variedad en cuestión es un abierto U de $\mathbb{R}^n$. En ese caso una métrica riemanniana será una aplicación diferenciable $g : U \to GL(n, \mathbb{R})$ tal que, para toda $p \in U$, $g(p)$ es una matriz simétrica y positiva definida.

Una métrica riemanniana nos permite medir, en cada punto de la variedad, el ángulo formado por dos campos vectoriales cualesquiera, así como sus longitudes.

5.1 Métricas en grupos de Lie

1. Definición. Una isometría de una variedad riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ es un difeomorfismo $f : M \to M$ que además satisface

$$\langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{f(p)} = \langle X, Y\rangle_p$$

para todo $p \in M$ y cualesquiera $X, Y \in T_pM$. En otras palabras, una isometría es un difeomorfismo cuya derivada es una isometría de espacios vectoriales con producto interior.

Cuando la variedad es un grupo de Lie, nos interesan aquellas métricas para las cuales el grupo actúa sobre él mismo por isometrías. Para ser más precisos:

2. Definición. Sea G un grupo de Lie y $\langle , \rangle$ una métrica riemanniana en él. Decimos que

- $\langle , \rangle$ es invariante por la izquierda, si, para toda $g \in G$, ℓ_g es una isometría.
- $\langle , \rangle$ es invariante por la derecha, si, para toda $g \in G$, r_g es una isometría.
- $\langle , \rangle$ es binvariante si es invariante por la izquierda y por la derecha.

Recuerda que

$r_g : G \to G$, $r_g(x) = xg$.

$\ell_g : G \to G$, $\ell_g(x) = gx$.

$C_g : G \to G$, $C_g(x) = gxg^{-1}$; i.e. $C_g = r_{g^{-1}} \circ \ell_g = \ell_g \circ r_{g^{-1}}$.

$\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}_g(X) = dC_g(e)(X)$; donde $\mathfrak{g} = T_eG$ es el álgebra de Lie de G.

$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}_g$.

$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}(X) = d\mathrm{Ad}(e)(X)$.

Recuerda, además, que $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

3. Teorema. *Sea G un grupo de Lie.*

i. G admite una métrica invariante por la izquierda (derecha).

ii. G admite una métrica binvariante sii existe en $\mathfrak{g}$ un producto interior invariante bajo Ad_g, para toda $g \in G$.

iii. Si $G = K \times \mathbb{R}^n$ con K compacto, entonces G admite una métrica binvariante (ver Teorema 7.0.6) para un recíproco de este resultado).

Demostración.

i. La idea es simplemente tomar cualquier producto interior en $\mathfrak{g}$ y trasladarlo a todo G mediante ℓ_g. A saber, sea $\langle , \rangle$ un producto interior en $\mathfrak{g}$; definimos, para $X, Y \in T_gG$

$$(X,Y)_g := \langle d\ell_{g^{-1}}X, d\ell_{g^{-1}}Y\rangle;$$

es fácil comprobar que $(,)$ es invariante por la izquierda.

Otra manera equivalente: escojamos una base ortonormal $\{X_j\}$ de $\mathfrak{g}$, extendamos estos vectores a campos vectoriales invariantes por la izquierda. Definimos una métrica al declarar ortonormales a estos campos en todo punto de G.

ii. Supongamos que $\langle , \rangle$ en $\mathfrak{g}$ es Ad-invariante. Definamos $(,)$ como en i. Queremos comprobar que ${r_g}^*(,) = (,)$. Tomemos $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\begin{aligned} r_g^*(X,Y) &= (dr_gX, dr_gY) = \langle d(\ell_{g^{-1}} \circ r_g)X, d(\ell_{g^{-1}} \circ r_g)Y\rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}}X, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}Y\rangle = \langle X, Y\rangle. \end{aligned}$$

El recíproco se deja como ejercicio.

iii. La métrica euclideana en $\mathbb{R}^n$ es claramente binvariante, por lo tanto es suficiente con demostrar que un grupo compacto admite una métrica binvariante.

Todo grupo de Lie compacto K admite una forma de volumen vol que es invariante por la derecha ($\mathrm{vol}(Sk) = \mathrm{vol}(S)$) y que ha sido normalizada para que $\mathrm{vol}(K) = 1$ ([He] p.135).

Sea $\langle , \rangle$ un producto interior cualquiera en el álgebra de Lie, $\mathfrak{k}$, de K. Definimos, para todo $X, Y \in \mathfrak{k}$,

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \int_K \langle \mathrm{Ad}_k X, \mathrm{Ad}_k Y\rangle \, d\mathrm{vol}(k).$$

Ahora, si $l \in K$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathrm{Ad}_l X, \mathrm{Ad}_l Y\rangle\rangle &= \int_K \langle \mathrm{Ad}_k(\mathrm{Ad}_l X), \mathrm{Ad}_k(\mathrm{Ad}_l Y)\rangle \, d\mathrm{vol}(k) \\ &= \int_K \langle \mathrm{Ad}_{kl} X, \mathrm{Ad}_{kl} Y\rangle \, d\mathrm{vol}(k) \\ &= \int_K \langle \mathrm{Ad}_k X, \mathrm{Ad}_k Y\rangle \, d\mathrm{vol}(k) \\ &= \langle\langle X, Y\rangle\rangle \end{aligned}$$

en donde la penúltima igualdad se sigue del teorema de cambio de variable y de la invariancia de vol. $\square$

5.2 La forma de Cartan-Killing

Recordemos que la forma de Cartan-Killing del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal, simétrica, en $\mathfrak{g}$ dada por

$$\kappa(X, Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y))$$

$X, Y \in \mathfrak{g}$. Como se probó en la primera parte de estas notas, κ goza además de la siguiente propiedad:

$$\kappa \text{ es Ad-invariante.}$$

Esto nos dice que siempre existe en $\mathfrak{g}$ una forma bilineal, simétrica y Ad-invariante; sin embargo, κ bien puede ser degenerada o indefinida:

1. Ejemplo. Consideremos el grupo de Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset SL_3(\mathbb{R});$$

su álgebra de Lie es el espacio de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal. Una base del álgebra está dada por $\{A, B, C\}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $[A, B] = C$, $[A, C] = [B, C] = 0$, y por lo tanto, con respecto a esta base,

$$\operatorname{ad}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{ad}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{ad}(C) = 0.$$

Finalmente, se calcula que $\kappa \equiv 0$.

Más generalmente, si $\mathfrak{g}$ tiene un centro no trivial, entonces κ será degenerada: $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \operatorname{ad}(Z) = 0 \Rightarrow \kappa(Z, X) = 0$ para toda $X \in \mathfrak{g}$.

5.3 Grupos simples y semisimples

1. Definición. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

i. Decimos que $\mathfrak{g}$ es semisimple si κ es no degenerada.

ii. $\mathfrak{g}$ es simple si $\dim \mathfrak{g} > 1$ y $\mathfrak{g}$ no contiene ideales distintos de 0 y $\mathfrak{g}$ (un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal si $[X, H] \in \mathfrak{h}$ para todos $X \in \mathfrak{g}$ y $\mathcal{H} \in \mathfrak{h}$).

iii. Un grupo de Lie es semisimple (simple) si su álgebra lo es.

La relación entre álgebras simples y semisimples la da el siguiente resultado (una prueba de él puede encontrarse en [He] p.131-132).

2. Teorema. *Un álgebra de Lie es semisimple si y sólo si es una suma directa de álgebras simples.*

3. Teorema. *G es compacto y semisimple $\Longleftrightarrow$ κ es negativa definida.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Consideremos $\widetilde{G}$ la cubierta universal de G: su álgebra de Lie y forma de Cartan-Killing coinciden con las correspondientes a G: $\mathfrak{g}$ y κ respectivamente. κ negativa nos dice que $-\kappa$ induce una métrica binvariante en $\widetilde{G}$. Ahora, Teorema 7.0.6 que probaremos más adelante, implica que $\widetilde{G} = K \times \mathbb{R}^n$ con K compacto. Pero como κ es no degenerada, $\widetilde{G}$ es semisimple, por lo tanto no aparece el factor euclidiano. Finalmente, si $\widetilde{G}$ es semisimple y compacto, también G lo es.

($\Rightarrow$) Si G es compacto entonces $\mathfrak{g}$ admite un producto interior B, positivo definido y Ad-invariante. En ese caso, cada Ad_g pertenece al grupo ortogonal $O(B)$, y por lo tanto para toda $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{o}(B)$, i.e. $\mathrm{ad}(X)$ es antisimétrica. Entonces,

$$\kappa(X, X) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(X)) = -\,\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)^t \mathrm{ad}(X)) = -\|\mathrm{ad}(X)\|^2$$

donde $\|A\|^2$ representa la suma de los cuadrados de las entradas de la matriz A. En este caso, $\kappa(X, X) \leq 0$ con igualdad sii X pertenece al centro de $\mathfrak{g}$, que por ser semisimple es cero. $\square$

4. Ejemplo. $SO_n(\mathbb{R})$, SU_n son compactos y simples, por lo tanto $-\kappa$ induce una métrica binvariante en ellos. $SL_n(\mathbb{R})$, $SO^+_{n,1}(\mathbb{R})$, $SU_{n,1}$, $Sp_n(\mathbb{R})$ son simples y no compactos, κ es no degenerada, pero indefinida; más adelante (5.6.7, 6.4.2) veremos como utilizar κ en el caso no compacto para generar métricas interesantes.

5.4 Ejercicios

1. Prueba que la única (salvo multiplicación por un escalar) forma bilineal, simétrica y Ad-invariante en un grupo simple y compacto es la forma de Cartan-Killing. Sigue los siguientes pasos para la demostración.

Sea G compacto y simple, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, κ la forma de Cartan-Killing. Sabemos que κ es negativa definida y que para toda $g \in G$, $\mathrm{Ad}_g \in O(\kappa)$.

i. Sea B una forma bilineal, simétrica y Ad-invariante en $\mathfrak{g}$. Sea $\mathbf{B}$ la matriz de B con respecto a una base ortonormal (relativa a $-\kappa$). Sea λ un eigenvalor de $\mathbf{B}$ y denotemos por $\mathfrak{g}_\lambda$ el eigenespacio correspondiente.

Como $\mathrm{Ad}_g \in O(\kappa)$ tenemos que $(\mathrm{Ad}_g)^t = (\mathrm{Ad}_g)^{-1}$. Usa esto para probar que $\mathfrak{g}_\lambda$ es invariante bajo Ad_g.

ii. Prueba que $\mathfrak{g}_\lambda$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Para esto basta que pruebes que $\mathfrak{g}_\lambda$ es invariante bajo $\mathrm{ad}(X)$ para cualquier $X \in \mathfrak{g}$.

iii. Como $\mathfrak{g}$ es simple, concluye que $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}$ y que $B = \lambda\kappa$.

2. Comprueba que en $\mathfrak{so}_n$ la forma $B(X,Y) = \operatorname{Tr} XY$ es bilineal, simétrica y Ad-invariante. Por lo tanto, ésta es un múltiplo de la forma de Cartan-Killing.

3. ¿ Qué crees que pase para grupos simples pero no compactos? ¿ Por ejemplo, para $SL_n(\mathbb{R})$?

4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Prueba que la forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{h}$ es la restricción de la de $\mathfrak{g}$.

Ojo 6.1. *Considera en $\mathfrak{gl}_n$ la forma $B(X,Y) = \mathrm{Tr}(XY)$; q es bilineal, simétrica y Ad_{GL_n}-invariante (¡pero no es la forma de Cartan-Killing!). Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ es cualquier subálgebra entonces q restringida a $\mathfrak{g}$ también será bilineal, simétrica y Ad_G-invariante. Por lo tanto, si $\mathfrak{g}$ es simple, q será un múltiplo de κ.*

5.5 Métricas en espacios homogéneos

En el apartado anterior vimos que un grupo G siempre admite métricas para las cuales el grupo actúa por isometrías, y destacamos entre esas métricas a las binvariantes. Ahora queremos explorar si esto sigue ocurriendo para espacios homogéneos arbitrarios.

Si G/H es un espacio homogéneo, podemos intentar la misma construcción que utilizamos para generar métricas invariantes en un grupo. A saber, tomemos un producto interior cualquiera en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_{[e]}(G/H)$, y trasladémoslo a todos los puntos del espacio mediante traslaciones por la izquierda. Inmediatamente nos topamos con un problema, ¿qué elemento usar para trasladar de $[e]$ a $[g]$? Podemos usar g mismo, pero también gh para cualquier $h \in H$. Lo que quisiéramos es que esta traslación del producto interior no dependiése del representante escogido.

1. Teorema. *Existe una correspondencia biyectiva entre las métricas G-invariantes en G/H y los productos interiores en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ que son Ad_H-invariantes.*

Demostración. Sea $(,)$ una métrica G-invariante en G/H. Si $h \in H$ y $\langle , \rangle := (,)_{[e]}$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y\rangle &= (d\ell_h(dr_{h^{-1}}(X)), d\ell_h(dr_{h^{-1}}(Y)))_{[e]} \\ &= (dr_{h^{-1}}X, dr_{h^{-1}}Y)_{[h^{-1}e]=[e]}\end{aligned}$$

y en donde la última igualdad sigue de la G-invariancia de la métrica. Ahora, $dr_h X = [\mathrm{Exp}(tX)h]_0' = [\mathrm{Exp}(tX)h]_0' = X$ para toda $h \in H$. Por lo tanto

$$\langle \mathrm{Ad}_h X, \mathrm{Ad}_h Y\rangle = (dr_{h^{-1}}X, dr_{h^{-1}}Y)_{[e]} = (X,Y)_{[e]} = \langle X, Y\rangle.$$

Recíprocamente, dado $\langle , \rangle$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, Ad_H-invariante, lo extendemos a una métrica $(,)$ en G/H por traslación por G:

$$(X,Y)_{[g]} = \langle d\ell_{g^{-1}}X, d\ell_{g^{-1}}Y\rangle.$$

Basta comprobar que $(,)$ está bien definido. Si $h \in H$, entonces $[gh] = [g]$ y

$$\begin{aligned}\langle d\ell_{(gh)^{-1}}X, d\ell_{(gh)^{-1}}Y\rangle &= \langle d\ell_{h^{-1}}d\ell_{g^{-1}}X, d\ell_{h^{-1}}d\ell_{g^{-1}}Y\rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}_h d\ell_{g^{-1}}X, \mathrm{Ad}_h d\ell_{g^{-1}}Y\rangle \\ &= \langle d\ell_{g^{-1}}X, d\ell_{g^{-1}}Y\rangle\end{aligned}.$$

□

2. Un espacio homogéneo sin métricas invariantes..

$G = SL_3(\mathbb{R})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in SL_2(\mathbb{R}) \right\} \simeq SL_2(\mathbb{R})$.

G/H no admite una métrica G-invariante.

Supongamos que $(,)$ es una métrica G-invariante, entonces $\langle , \rangle = (,)_{[e]}$ es un producto interior Ad_H-invariante en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Entonces $\mathrm{Ad}_H \subset O(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ y por lo tanto tiene cerradura compacta en $O(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.

Tomemos $h_t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}$ para toda $t > 0$. En este caso, podemos identificar a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ con el subespacio Ad_H-invariante $\mathfrak{p}$ dado por

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 2r & x & y \\ z & -r & 0 \\ w & 0 & -r \end{pmatrix} \mid r,x,y,z,w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un cálculo sencillo muestra que la matriz de Ad_{h_t} con respecto a la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathfrak{p}$ es

$$\mathrm{Ad}_{h_t} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que Ad_H no tiene cerradura compacta.

3. Métricas binvariantes en U_2..

$\mathfrak{u}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} ir & z \\ -\bar{z} & is \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C},\ r, s \in \mathbb{R} \right\}.$

Para toda $c > -1/2$ definimos un producto interior en $\mathfrak{u}_2$:

$$\langle X, Y \rangle^c = -\operatorname{Tr} XY - c \operatorname{Tr} X \operatorname{Tr} Y.$$

$\langle , \rangle^c$ es bilineal, simétrico y si $X = \begin{pmatrix} ir & z \\ -\bar{z} & is \end{pmatrix}$ es distinta de cero, entonces

$$\langle X, X \rangle^c = r^2 + s^2 + 2z\bar{z} + c(r+s)^2 > 0.$$

Además $\langle , \rangle^c$ es Ad_{U_2}-invariante. Por lo tanto $\langle , \rangle^c$ genera una familia de métricas binvariantes sobre U_2. Nota que $\langle , \rangle^{\frac{1}{2}} = -\kappa$.

Más aun, estas métricas descienden a métricas U_2-invariantes en cocientes como $S^3 = U_2/U_1$, $S^2 \times S^1 = U_2/U_1$, etc. según lo que se explica a continuación.

5.6 Espacios reductivos

1. Definición. Un espacio homogéneo G/H es *reductivo* si podemos descomponer $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ de tal forma que $\mathrm{Ad}_H \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.

Ejemplos de espacios homogéneos reductivos son (ver [KN] p. 199):

- Aquellos con H compacto.
- Aquellos con H discreto.

2. Ejercicio. *Si G/H es reductivo entonces existe una biyección entre las métricas G-invariantes sobre G/H y productos interiores Ad_H-invariantes en $\mathfrak{p}$.*

En particular todo producto interior Ad_H-invariante sobre $\mathfrak{g}$ induce una métrica invariante en G/H.

3. Teorema. *Si $K \subset G$ es compacto, entonces G/K siempre admite métricas invariantes.*

Demostración. Por ser K compacto, el espacio homogéneo G/K es reductivo; por lo tanto la existencia de una métrica invariante es equivalente a la existencia de un producto interior en $\mathfrak{p}$ que sea Ad_K-invariante. Pero por ser K compacto, este último siempre existe; para probarlo puede usarse un argumento de promediar bajo K como el usado en el Teorema 5.1.3.iii. $\square$

4. Definición. Un difeomorfismo $f : M \to N$ entre dos variedades riemannianas (M, g), (N, h) es una *homotecia* si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $p \in M$ y todo $X, Y \in T_pM$,

$$h_{f(p)}(df_pX, df_pY) = Cg_p(X, Y).$$

Por ejemplo, las métricas inducidas en las esferas unidad y de radio r en $\mathbb{R}^n$ son homotéticas; en general dos métricas homotéticas pueden pensarse la una obtenida de la otra inflando la variedad. Así, dos métricas homotéticas son básicamente la misma.

5. Pregunta. ¿ Las métricas binvariantes en U_2 consideradas en 5.5.3 arriba son homotéticas entre sí? (Sugerencia: echa un ojo a la sección de geodésicas, calcula las longitudes de algunas de ellas bajo las distintas métricas).

6. La métrica redonda y la de Fubini-Study..

$SO_{n+1}(\mathbb{R})$ y SU_{n+1} son compactos y simples. El producto interior $\langle X, Y\rangle = -\operatorname{Tr} XY$ en $\mathfrak{so}_{n+1}$ y $\mathfrak{su}_{n+1}$ es Ad-invariante y por tanto un múltiplo de la forma de Cartan Killing. Este producto interior induce métricas invariantes en los cocientes $SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \simeq S^n$ y $SU_{n+1}/S(U_1 \times U_n) \simeq \mathbb{CP}^n$. Estas métricas se llaman **"la redonda"** (en S^n) y **la de Fubini-Study** (en $\mathbb{CP}^n$).

7. La métrica simétrica en $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$..

En $\mathfrak{sl}_3 = \{A \in M_{3\times3} \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$ tomamos $\langle X, Y\rangle = \operatorname{Tr} XY$, el cual es Ad-invariante.

$\mathfrak{so}_3 = \{A \mid A = -A^t\}$. Definimos $\mathfrak{p} = \{A \mid \operatorname{Tr} A = 0,\ A = A^t\}$. Es claro que $\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{so}_3 \oplus \mathfrak{p}$ ya que toda matriz se descompone de manera única como la suma de una simétrica más otra antisimétrica.

Además $\mathrm{Ad}_{SO_3(\mathbb{R})} \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ ya que $OAO^{-1} = OAO^t$ es también simétrica. De aquí se sigue que $\langle , \rangle$ induce una forma bilineal, simétrica e invariante en $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$.

Más aun, esta forma en el cociente es positiva definida (i.e. una métrica de Riemann), ya que si $0 \neq Y \in \mathfrak{p} \Rightarrow \langle Y, Y\rangle = \operatorname{Tr} Y^2 = \operatorname{Tr} Y^tY > 0$.

Recordemos que $X = SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R}) = \{A \mid A^t = A, A > 0, \det A = 1\}$. Tomemos $\Phi : X \to X$ dado por $\Phi(A) = A^{-1}$. Φ es un difeomorfismo de X, y la identidad I es su único punto fijo.

Derivando la ecuación $A \cdot \Phi(A) = I$ en el punto A obtenemos que, si $M \in T_AX$ entonces

$$d\Phi_A(M) = -A^{-1}MA^{-1},$$

en particular $d\Phi_I(M) = -M$. Trasladando $\mathfrak{p}$ a A mediante $g = \sqrt{A} \in SL_3(\mathbb{R})$ podemos calcular que $T_AX = \{\sqrt{A}M\sqrt{A} \mid M^t = M,\ \operatorname{Tr} M = 0\}$. Ahora, si $M, N \in$

$T_A X$

$$\begin{aligned}(M,N) &= \langle \sqrt{A}^{-1} M \sqrt{A}^{-1}, \sqrt{A}^{-1} N \sqrt{A}^{-1} \rangle \\ &= \operatorname{Tr} \sqrt{A}^{-1} M A^{-1} N \sqrt{A}^{-1} \\ &= \operatorname{Tr} M A^{-1} N A^{-1} \\ &= \operatorname{Tr} A^{-1} M A^{-1} N \\ &= \langle \sqrt{A} d\Phi_A(M) \sqrt{A}, \sqrt{A} d\Phi_A(N) \sqrt{A} \rangle \\ &= (d\Phi_A M, d\Phi_A N).\end{aligned}$$

Por lo tanto Φ es una isometría: es la simetría con respecto a I. En cualquier otro punto A de X podemos definir una simetría: $\Psi^A(B) = AB^{-1}A$, que tiene la propiedad de ser isometría, tiene a A como único punto fijo y cuya derivada en A es $-I$. Por eso se dice que X con esta métrica es un "espacio simétrico" ([Be], [He], [KN]).

8. Ojo. *La métrica redonda en la esfera y la de Fubini-Study en el proyectivo también son métricas simétricas.*

6. LA CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA

Todo campo vectorial X en $\mathbb{R}^n$ puede pensarse como una aplicación $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Visto así tiene sentido hablar de su derivada y en particular de sus derivadas direccionales. Si Y es otro campo vectorial y $p \in \mathbb{R}^n$, podemos definir un nuevo campo tomando la derivada direccional de X en la dirección de Y; para ser más precisos, definimos el campo: $p \mapsto dX_p(Y(p))$. Denotemos este nuevo campo con el símbolo $\nabla_Y X$. En coordenadas, si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, entonces

$$(\nabla_Y X)(p) = (\sum_{j=1}^n Y_j(p) \frac{\partial X_1}{\partial x_j}(p), \ldots, \sum_{j=1}^n Y_j(p) \frac{\partial X_n}{\partial x_j}(p)).$$

El campo $\nabla_Y X$ satisface ciertas propiedades naturales con respecto al corchete de Lie y al producto interior en $\mathbb{R}^n$:

- $\nabla_Y X$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas.
- El valor de $\nabla_Y X$ en el punto p únicamente depende de $Y(p)$ (y no del resto del campo vectorial Y).
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $\nabla_Y (f \cdot X) = df(Y) \cdot X + f \cdot \nabla_Y X$ (Regla de Leibniz).
- $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$ (Simetría).
- Si Z es otro campo vectorial y $f(p) = \langle X(p), Z(p) \rangle$ entonces

$Y\langle X, Z\rangle = Yf := df(Y) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle$ (Compatibilidad con la métrica).

Pasemos ahora al caso de una variedad riemanniana (M, g) de dimensión n. Localmente, todo campo vectorial sobre M nuevamente vuelve a ser una aplicación diferenciable de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Nos podemos preguntar si existe en este contexto más general una manera de diferenciar campos vectoriales (una operación básica para poder hacer geometría diferencial).

1. Teorema. *Dada una variedad riemanniana cualquiera existe una única manera de derivar campos vectoriales y que satisfaga las propiedades arriba mencionadas. A esta operación se le llama la conexión de Levi-Civita.*

Idea de la demostración. Supongamos que X, Y y Z son campos vectoriales arbitrarios y supongamos que existe una conexión ∇ que satisface las propiedades arriba enunciadas. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras y restando la tercera obtenemos una ecuación, que simplificando usando la simetría de la conexión resulta

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle = &\frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle\}. \end{aligned} \tag{†}$$

Usamos el lado derecho de esta ecuación para definir $\nabla_Y X$, y se comprueba que en efecto satisface todas las propiedades mencionadas. La unicidad se sigue de la misma fórmula usando que $\langle , \rangle$ es no degenerada. $\square$

Cuando la variedad riemanniana es un grupo de Lie con métrica invariante, la conexión de Levi-Civita tiene una expresión puramente algebraica.

2. Teorema. *G un grupo de Lie, $\langle , \rangle$ métrica riemanniana invariante por la izquierda. Si X y Y son campos invariantes por la izquierda, entonces $\nabla_X Y$ también es invariante por la izquierda y su valor (en la identidad) está dado por*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\{[X, Y] - (ad(X))^*(Y) - (ad(Y))^*(X)\}$$

donde $(ad(X))^*$ denota la adjunta de $ad(X)$ con respecto a $\langle , \rangle$.

Demostración. La prueba sigue fácilmente de la ecuación (†) exhibida en la demostración del teorema anterior. $\square$

3. Corolario. *G grupo de Lie, $\langle , \rangle$ métrica binvariante. Si X y Y son invariantes por la izquierda entonces $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.*

Demostración. Que la métrica sea binvariante significa que el producto interior en $\mathfrak{g}$ es Ad-invariante. Esto implica que $\mathrm{Ad}_G \subset O(\mathfrak{g})$ y por lo tanto $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{o}(\mathfrak{g})$ para toda X; i.e. $\mathrm{ad}(X)$ es anti-simétrica.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -(\mathrm{ad}(X))^*(Y) - (\mathrm{ad}(Y))^*(X) &= \mathrm{ad}(X)(Y) + \mathrm{ad}(Y)(X) \\ &= [X, Y] + [Y, X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

6.1 Geodésicas

Dado un campo vectorial cualquiera X en una variedad riemanniana, podemos interpretar $\nabla_X X$ como la aceleración de las curvas integrales de X.

1. Definición. Sea $\gamma : I \to (M, g)$ una curva C^∞.

γ es una geodésica si $\nabla_{\gamma'}\gamma' \equiv 0$.

2. Ojo. *$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden. Por lo tanto, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias muestra que, dado un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_pM$, siempre existe una* **única** *geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.*

Si toda geodésica de (M, g) puede definirse en todo $(-\infty, \infty)$ diremos que la variedad riemanniana es *geodésicamente completa*. Enunciamos, sin demostración (ver [Be] p. 181), el siguiente resultado importante en nuestra discusión:

"Todo espacio homogéneo, con métrica invariante es geodésicamente completo."

3. Lema. *Toda geodésica está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco.*

Demostración. $\frac{\partial}{\partial t}\langle \gamma', \gamma' \rangle = 2\langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle \equiv 0$, por lo tanto $\langle \gamma', \gamma' \rangle =$ constante.

4. Ojo. *A toda curva diferenciable $c : [a, b] \to M$ en una variedad riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ se le puede medir su longitud $l = \int_a^b \|c'(t)\|\, dt$. Dados dos puntos fijos en M, el problema de encontrar la curva de longitud mínima que los une puede atacarse*

por métodos variacionales; la ecuación de Euler-Lagrange resultante es precisamente $\nabla_{c'}c' = 0$. *Luego podemos pensar que las geodésicas son los puntos críticos (y localmente mínimos) de la longitud.*

Una pregunta natural es si las curvas integrales a campos vectoriales invariantes por la izquierda (en un grupo de Lie) son geodésicas. Aunque en general esto no es cierto, sí se tiene para métricas binvariantes.

5. Teorema. *G grupo de Lie, $\langle,\rangle$ métrica binvariante. Los subgrupos a uniparamétricos de G son las geodésicas de G que pasan por la identidad.*

Demostración. Ya que toda geodésica por la identidad queda determinada por su dirección en este punto, basta probar que los subgrupos uniparamétricos son geodésicas. Si X es invariante por la izquierda, Corolario 6.0.3 nos dice que $\nabla_X X = \frac{1}{2}[X,X] = 0$ $\square$

Observa que este teorema nos dice, por ejemplo, que todas las métricas $\langle,\rangle^c$ en U_2, definidas en 5.5.3, poseen las mismas geodésicas.

El recíproco del teorema anterior también es cierto, lo enunciamos sin demostración: *G grupo de Lie, $\langle,\rangle$ métrica invariante por la izquierda. Si todos los grupos uniparamétricos de G son geodésicas para $\langle,\rangle$, entonces $\langle,\rangle$ es binvariante.*

Para poder calcular todas las geodésicas en algunos de los ejemplos que se presentan a continuación, necesitaremos la siguiente observación (ver [GHL]).

6. Lema. *$\gamma : I \to M$ geodésica. Si $f : M \to M$ es una isometría, entonces $f \circ \gamma$ también es geodésica.*

7. Geodésicas en la esfera S^3.

$G = SU_2 \simeq S^3$, $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$ determina una métrica binvariante. Calculemos sus geodésicas.

$\mathfrak{su}_2 = \{X \mid X + \bar{X}^t = 0,\ \operatorname{Tr} X = 0\}$, así que la matriz $v = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}_2 = T_{\mathbb{1}}SU_2$. Observa que $\|v\| = 1$ y que $\operatorname{Exp}(tv) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$.

$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(tv)$ es la geodésica en SU_2 que pasa por $\mathbb{1}$ en la dirección de v. Esta geodésica es cerrada (con periodo 2π): $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ y $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$. Por estar parametrizada por longitud de arco sabemos que su longitud es 2π.

Si $U \in SU_2$ entonces $C_U(A) = UAU^{-1}$ es isometría. De nuestros cursos de álgebra lineal sabemos que toda matriz antihermitiana es diagonalizable, i.e. si $X \in \mathfrak{su}_2$

entonces existe $U \in SU_2$ tal que $UXU^{-1} = \begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & -ir \end{pmatrix}$. Si además $\|X\| = 1$ entonces $r = \pm 1$; esto es, existe $U \in SU_2$ tal que $UXU^{-1} = \pm v$.

La geodésica por $\mathbb{1}$ en dirección de $-v$ es simplemente $\gamma(-t)$. De la discusión del párrafo anterior se sigue que toda geodésica por $\mathbb{1}$ es de la forma $U\,\mathrm{Exp}(\pm tv)U^{-1}$. Para encontrar las geodésicas que pasan por un punto arbitrario A basta trasladar las geodésicas por $\mathbb{1}$, i.e. $AU\,\mathrm{Exp}(\pm tv)U^{-1}$ son todas las geodésicas que pasan por A. Esto prueba que todas las geodésicas de SU_2 con esta métrica son curvas cerradas de longitud 2π.

Nota: la métrica anterior coincide con la métrica inducida por la euclideana en la esfera unidad en $\mathbb{R}^4$. Las geodésicas encontradas arriba corresponden bajo esta identificación con los círculos máximos, i.e. la intersección de la esfera unidad con planos bidimensionales por el origen.

8. Un grupo a un parámetro que no es geodésica..

Recuerda que el grupo de Heisenberg es el subgrupo de $SL_3(\mathbb{R})$ definido como

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

El álgebra de Lie de H está generada por A, B y C dados de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos satisfacen las ecuaciones $[A, C] = [B, C] = 0$ y $[A, B] = C$. Definimos una métrica invariante por la izquierda en H declarando a A, B y C ortonormales.

Consideremos el campo vectorial X invariante por la izquierda generado por $A - C$ y usemos la fórmula dada en el Teorema 6.0.2 para calcular $\nabla_X X$. Un cálculo sencillo muestra que $\nabla_X X = C$ y por tanto que el grupo uniparamétricoo generado por X no es una geodésica.

6.2 Geodésicas en cocientes de grupos compactos

G compacto y $\langle , \rangle$ una métrica binvariante. Tomemos $K \subset G$ también compacto. Si escogemos $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp}$, entonces $\mathrm{Ad}_K \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}$ puede ser identificado con $T_{[e]}(G/K)$ y $\langle , \rangle$ restringido a $\mathfrak{p}$ determina una métrica invariante en G/K. Diremos que una curva $c : I \to G$ es *horizontal* si, para toda t, $c'(t) \perp (c(t) \cdot K)$. (**Ejercicio:** Hacer una figura).

1. TEOREMA. *Con* $(G/K, \langle , \rangle)$ *como arriba. Si* $X \in \mathfrak{p} \simeq T_{[e]}(G/K)$ *entonces la geodésica en* G/K *en la dirección de* X *es* $\gamma(t) = [\mathrm{Exp}(tX)]$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN. Por ser $\mathrm{Exp}(tX)$ un subgrupo uniparamétrico en un grupo con métrica binvariante, $\mathrm{Exp}(tX)$ es la geodésica en G en la dirección de X. Observa que si $X \in \mathfrak{p}$, $\mathrm{Exp}(tX)$ es horizontal.

Usaremos el siguiente hecho: dados dos puntos suficientemente cercanos en una variedad riemanniana, existe una única geodésica de longitud mínima que los une. Esto implica que toda geodésica realiza la distancia entre pares de puntos suficientemente cercanos sobre ella.

Si $c : I \to G$ es cualquier curva en el grupo, siempre se verifica la desigualdad $l(c) \geq l([c])$:

$$l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt \geq \int_a^b \|(c'(t))_{\text{hor}}\| \, dt = \int_a^b \|[c]'(t)\| \, dt$$

y donde $(c'(t))_{\text{hor}}$ denota la componente horizontal de $c'(t)$. Si $\gamma : [a, b] \to G$ es una curva horizontal tal que $[\gamma]$ es geodésica (cuya longitud es la distancia entre sus extremos), entonces si c es cualquier otra curva que une los extremos de γ se tiene que $l(\gamma) = l([\gamma]) \leq l([c]) \leq l(c)$ y por lo tanto γ es geodésica.

Recíprocamente, supongamos que γ es horizontal y que es la única geodésica que realiza la distancia entre sus extremos. Sea c una geodésica que realiza la distancia entre los extremos de $[\gamma]$. Existe una curva horizontal $\tilde{c}$ que une los extremos de γ y tal que $[\tilde{c}] = c$. Recuerda que del Teorema 5.1 se desprende que todo punto de G posee vecindades de la forma $U \times K$, U abierto de G/K. Esto garantiza la existencia local de $\tilde{c}$. Pegando estos "levantamientos" locales se obtiene la curva $\tilde{c}$.

Por lo expuesto anteriormente, $\tilde{c}$ es geodésica, pero por unicidad debe ser entonces igual a γ. Esto prueba que $c = [\gamma]$ y que por lo tanto $[\gamma]$ es geodésica. $\square$

Este teorema y nuestro conocimiento de las geodésicas en un grupo con métrica binvariante nos permite calcular las geodésicas en los espacios homogéneos asociados a dichos grupos. A continuación un ejemplo.

2. GEODÉSICAS EN $\left(\mathbb{CP}^2,\ \text{FUBINI-STUDY}\right)$.

Consideramos el espacio homogéneo $SU_3/S(U_1 \times U_2) \simeq \mathbb{CP}^2$ con la métrica inducida por el producto interior en $\mathfrak{su}_3$ dado por $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} XY$.

El álgebra de Lie de $K = S(U_1 \times U_2)$ es

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{u}_2 \ \text{ y } \ \operatorname{Tr} A = -ir \right\},$$

y si tomamos

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

entonces $\mathfrak{su}_3 = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ y $\mathrm{Ad}_K \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Por lo tanto podemos identificar a $\mathfrak{p}$ con $T_{[\mathbb{1}]}\mathbb{CP}^2$.

Miramos el vector $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{su}_3$ y la geodésica que determina en SU_3, i.e. $\mathrm{Exp}(tv)$. Calculamos esta exponencial y obtenemos que

$$\mathrm{Exp}(tv) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

observa que $\langle v, v \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} v^2 = 1$. $\mathrm{Exp}(tv)$ es una geodésica parametrizada por longitud de arco, que además es cerrada y tiene longitud 2π.

Si γ es la geodésica en $\mathbb{CP}^2$ con $\gamma(0) = [\mathbb{1}]$ y con $\gamma'(0) = v$ entonces su levantamiento horizontal por $\mathbb{1}$ es precisamente $\mathrm{Exp}(tv)$. En otras palabras, $\gamma(t) = [\mathrm{Exp}(tv)]$. En particular γ es cerrada y está parametrizada por longitud de arco.

Sin embargo $\gamma(\pi) = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [\mathbb{1}] = \gamma(0)$ ya que $\mathrm{Exp}(\pi v) \in K$, y además $\gamma'(\pi) = \gamma'(0)$. Esto dice que γ tiene longitud π.

No es muy dificil comprobar que K actúa transitivamente en la esfera unidad en $\mathfrak{p}$ (i.e. en los elementos de $\mathfrak{p}$ de norma 1); esto implica que para obtener cualquier otra geodésica en $\mathbb{CP}^2$ basta trasladar a γ por elementos de SU_3. En particular, ¡todas las geodésicas de $\mathbb{CP}^2$ son cerradas y de longitud π!

$\mathbb{CP}^2$ con esta métrica es “muy redondo”, sin embargo es topológicamente distinto a S^4. Puede probarse que, después de la esfera redonda, el plano proyectivo complejo con la métrica de Fubini-Study es la 4-variedad más redonda (en un sentido muy preciso) que hay (ver ejemplo 7.1.2).

Antes de concluir con este ejemplo, miremos un poco más a las geodésicas de SU_3. Aquellas que son horizontales ya las conocemos, son curvas cerradas de longitud 2π. Consideremos geodésicas verticales.

Sea $X = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & ri & 0 \\ 0 & 0 & (-1-r)i \end{pmatrix}$, la geodésica que determina es

$$\mathrm{Exp}(tX) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{rit} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-1-r)it} \end{pmatrix}.$$

Si r es irracional entonces $\mathrm{Exp}(tX)$ no es cerrada, así que muchas geodésicas verticales no serán cerradas.

6.3 Ejercicios

1. Calcula cuales son todas las geodésicas de $S^n \simeq SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$, con la métrica inducida por $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$.

2. Misma pregunta para $S^{2n+1} \simeq SU_{n+1}/SU_n$.

3. Misma pregunta para $S^2 \times S^1 \simeq U_2/U_1$ (ver ejemplo 4.2.8), para la familia de métricas binvariantes en U_2 dadas por

$$\langle X, Y\rangle^c = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY - \frac{c}{2}\operatorname{Tr} X \operatorname{Tr} Y$$

$c > -1$.

6.4 Geodésicas en espacios homogéneos no compactos

Sea G un grupo de Lie semisimple, y κ la forma de Cartan-Killing. Tomemos un subgrupo compacto K de G y estudiemos el espacio homogéneo G/K. Hemos observado que este espacio es reductivo, así que tenemos una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es Ad_K-invariante. De aquí que κ descienda a una forma bilineal, simétrica e invariante en G/K. En algunos casos, resulta que κ es definida en $\mathfrak{p}$ y define una métrica de riemann en G/K. En este caso, podemos indicar como calcular las geodésicas de este espacio.

1. TEOREMA. *G semisimple, κ la forma de Cartan-Killing. Sea $K \subset G$ un subgrupo compacto tal que existe una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ Ad_K-invariante y tal que κ restringida a $\mathfrak{p}$ es definida.*

Bajo estas hipótesis, las geodésicas de $(G/K, \kappa)$ son las imágenes de los subgrupos horizontales uniparamétricos de G.

Observa que hemos probado antes que $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ satisface las hipótesis de este teorema.

A continuación otro ejemplo concreto.

2. LAS GEODÉSICAS DEL PLANO HIPERBÓLICO..

El plano hiperbólico es el espacio homogéneo $\mathcal{H}^2 \simeq SO^+_{2,1}(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

Si $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\mathfrak{so}_{2,1} = \{A \mid A^t\mathbf{B} + \mathbf{B}A = 0,\ \operatorname{Tr} A = 0\} \text{ y } \mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un cálculo muestra que $\mathfrak{so}_{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & r \\ y & -r & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, r \in \mathbb{R} \right\}$ y entonces es fácil comprobar que tomando $\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ siendo $\mathrm{Ad}_{SO_2(\mathbb{R})}$-invariante.

La forma de Cartan-Killing en $SO^+_{2,1}(\mathbb{R})$ es un múltiplo (positivo) de $\langle X, Y \rangle = \operatorname{Tr} XY$. Si $X = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle X, X \rangle = 2(x^2 + y^2)$ y por tanto es positiva definida al restringirla a $\mathfrak{p}$. Nos encontramos en la situación descrita en el teorema anterior.

Sea $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculamos que

$$\operatorname{Exp}(tv) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El teorema nos garantiza que la imágen de esta curva (que es horizontal) es una geodésica en $SO^+_{2,1}(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. Una imagen más clara nos la da el modelo del hiperboloide definido en 4.2.11. Recordemos.

$\mathcal{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = -1,\ x > 0\}$. El difeomorfismo entre estos dos modelos era dado por:

$$[g] \in SO^+_{2,1}(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \mapsto g \cdot (1, 0, 0) \in \mathcal{H}^2$$

en donde $\cdot$ es el producto usual de una matriz por un vector. Bajo este difeomorfismo la geodésica $[\operatorname{Exp}(tv)]$ corresponde a la curva $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$. Como $SO_2(\mathbb{R})$ es transitivo en la esfera unidad de $T_{(1,0,0)}\mathcal{H}^2$ todas las geodésicas de $\mathcal{H}^2$ se obtienen a partir de γ mediante traslaciones por elementos de $SO^+_{2,1}(\mathbb{R})$.

Nota que, como conjunto, γ es la intersección del hiperboloide $\mathcal{H}^2$ con el plano xy. Ya que la acción de $SO^+_{2,1}(\mathbb{R})$ es por transformaciones lineales (y como esta acción es transitiva en el conjunto de geodésicas) vemos que las geodésicas (como conjuntos sin parametrizar) de $\mathcal{H}^2$ son las curvas que se obtienen de intersectar planos por el origen de $\mathbb{R}^3$ con el hiperboloide.

En este caso no existen geodésicas cerradas.

3. Geodésicas en $X = SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$.

$\mathfrak{s}l_3 = \mathfrak{s}o_3 \oplus \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} = \{A \mid A^t = A,\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}$. Bajo la acción de $SO_3(\mathbb{R})$ cualquier $A \in \mathfrak{p}$ puede ser llevada a una diagonal $\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -r-s \end{pmatrix}$. Y dos de estas matrices diagonales son equivalentes bajo la acción de $SO_3(\mathbb{R})$ únicamente si sus elementos diagonales coinciden salvo por una permutación (en este caso K no actúa transitivamente en la esfera unidad de $T_{[\mathbb{1}]}X$).

Las geodésicas através de $[\mathbb{1}]$ son todas conjugadas a una de la forma

$$\left[\begin{pmatrix} e^{rt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{st} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(r+s)t} \end{pmatrix}\right].$$

7. CURVATURA

La curvatura es el invariante por excelencia de una variedad riemanniana, esto es debido a que por un lado conserva gran parte de la información que posee la métrica mientras que es, en muchos casos (notablemente para espacios homogéneos), posible calcularlo. En dimensión dos, la curvatura es visualmente intuitiva (una esfera es redonda, un plano está plano -tiene curvatura cero- y un cilindro también), y más fácil de imaginar que "un producto interior que varía diferenciablemente con el punto". Citamos dos referencias para que el lector pueda conocer un poco más sobre el concepto de curvatura: [Be], [GHL].

La curvatura en dimensiones mayores a dos es sumamente útil, aunque ya no tan fácil de visualizar. De hecho existen distintas nociones de curvatura todas con ciertos méritos y deficiencias. Nosotros nos concentraremos en la llamada *curvatura seccional.*

Dado un espacio vectorial V y dos vectores linealmente independientes $u, v \in V$, denotamos por $u \wedge v$ al 2-plano generado por u y v; sea, además, $\mathrm{Gr}(V)$ el conjunto de todos estos subespacios de dimensión 2 de V. Si M es una variedad, en cada punto $p \in M$ podemos tomar $\mathrm{Gr}_p = \mathrm{Gr}(T_pM)$.

1. Definición. Sea $(M, \langle , \rangle)$ una variedad riemanniana. La curvatura seccional es una función $K : \bigcup_{p\in M} \mathrm{Gr}_p \to \mathbb{R}$, que a cada 2-plano tangente a M le asocia un número real. Si $\Pi \subset T_pM$ es el plano generado por el par ortonormal $\{X, Y\}$ entonces

$$K(\Pi) = K(X \wedge Y) = \langle -\nabla_X \nabla_Y X + \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[X,Y]} X, Y \rangle.$$

K no depende de la elección de la pareja ortonormal empleada para su cálculo.

K mide la conmutatividad (o más bien, la falta de ella) al tomar una segunda derivada direccional, $\nabla_X \nabla_Y$. Uno de los primeros resultados geométricamente comprensibles acerca de K es (ver [GHL])

2. Teorema. *(M, g) una variedad riemanniana de dimensión n. Si $K \equiv 0$ entonces todo punto $p \in M$ posee una vecindad que es isométrica a un abierto del espacio euclidiano n-dimensional.*

Con este teorema podemos entender a K como la obstrucción a ser "plano" (i.e. localmente euclidiano).

3. Definición.

• Una variedad es de *curvatura constante* si K es una función constante.

• La curvatura de Ricci de una n-variedad riemanniana se define como el promedio (en cada punto) de las curvaturas seccionales. Más precisamente, si $X \in T_pM$ tiene norma uno, definimos

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_{j=2}^{n} K(\Pi_j)$$

donde Π_j es el plano generado por $\{X, e_j\}$ y donde $\{X, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM.

• Una variedad riemanniana es de Einstein si Ric es constante: para todo $p, q \in M$ y todo $X \in T_pM$, $Y \in T_qM$ unitarios, $Ric(X) = Ric(Y)$.

La curvatura de un espacio homogéneo se puede calcular en términos de su estructura algebraica. La fórmula en el caso general es algo complicada; enunciaré un caso especial sin demostración (ver [CE]):

4. Teorema. *G grupo de Lie, $\langle , \rangle$ métrica binvariante, $H \subset G$. Para la métrica invariante inducida en G/H se tiene que, si Π es el plano determinado por el par ortonormal $\{X, Y\}$, entonces*

$$K(\Pi) = \frac{1}{4}\|[X, Y]_{\mathfrak{p}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2.$$

En particular $K \geq 0$.

5. Corolario. *La curvatura seccional de un grupo G con métrica binvariante está dada por $K(\Pi) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2$.*

Podemos ahora dar un recíproco del Teorema 5.1.3.iii.

6. TEOREMA. *Sea G un grupo simplemente conexo que admite una métrica binvariante. Entonces $G = K \times \mathbb{R}^n$ donde K es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{z}$ el centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k} = \mathfrak{z}^\perp$; $\mathfrak{z}$ es un ideal y, por ser la métrica binvariante, $\mathfrak{k}$ también lo es. Por ser G simplemente conexo, a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{z}$ le corresponde una de grupos (de Lie con métricas binvariantes): $G = Z \times K$. Z es abeliano y simplemente conexo, por lo tanto es el grupo $\mathbb{R}^n$. K tiene una métrica binvariante, por lo tanto por el corolario anterior tiene curvatura no negativa. Como el centro de K es cero, *Ric* es estrictamente positivo y, por ser K homogéneo, acotado por abajo. En este caso el teorema de Bonnet-Myers ([CE], [GHL]) se aplica para probar que K es compacto $\square$

Antes de pasar a los ejemplos mencionamos un resultado en el caso no compacto (ver Teorema 6.4.1).

7. TEOREMA. *G semisimple no compacto, $K \subset G$ compacto y tal que κ desciende a una métrica de riemann (i.e. positiva) en G/K. La curvatura seccional de $(G/K, \kappa)$ está dada por*

$$K(\Pi) = -\|[X, Y]\|^2$$

donde Π es el plano generado por el conjunto ortonormal $\{X, Y\}$. En particular $K \leq 0$.

7.1 Ejemplos

1. LA CURVATURA DE LA MÉTRICA REDONDA..

$S^n \simeq SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$ con la métrica inducida por $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} XY$.

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ -y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\langle X, Y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Tomemos X y Y ortonormales y calculemos la curvatura del plano que generan. Para esto tenemos que calcular $[X, Y]$; no es dificil comprobar que $[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ donde $Z = (z_{ij})$ es la matriz antisimétrica con $z_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ si $i \geq j$.

Vemos que $[X,Y] \in \mathfrak{k}$, luego la fórmula del Teorema 7.0.4 implica que la curvatura del plano generado por X, Y es igual a $\|[X,Y]\|^2$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\|[X,Y]\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i^2y_j^2 - 2x_iy_jx_jy_i + x_j^2y_i^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2\sum_{j=1}^{n}y_j^2 - 2x_iy_i\sum_{j=1}^{n}x_jy_j + y_i^2\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la esfera S^n con esta métrica tiene curvatura seccional constante e igual a 1. Por eso se llama la métrica redonda.

2. La curvatura de la métrica de Fubini-Study.

Consideremos $\mathbb{CP}^n \simeq SU_{n+1}/S(U_1 \times U_n)$ con la métrica inducida por $\langle X,Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$. El espacio tangente a $SU_{n+1}/S(U_1\times U_n)$ en $[\mathbb{1}]$ puede identificarse con

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & \cdots & z_n \\ -\bar{z}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{z}_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

También tenemos que $\langle Z,W\rangle = \operatorname{Re}(z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n)$, si

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & \cdots & z_n \\ -\bar{z}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{z}_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & \cdots & w_n \\ -\bar{w}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{w}_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí $\operatorname{Re}(z)$ denota la parte real del número complejo z.

Supongamos Z y W ortonormales y calculemos $[Z,W]$:

$$[Z,W] = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(\bar{z}_iw_i - z_i\bar{w}_i) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde $B = (b_{ij})$ es la matriz antihermitiana dada por $b_{ij} = -\bar{z}_iw_j + z_j\bar{w}_i$. Nuevamente, $[Z,W] \in \mathfrak{k}$ así que $K(Z\wedge W) = \|[Z,W]\|^2$.

Un cálculo un poco latoso nos da que

$$K(Z\wedge W) = \|[Z,W]\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\langle JZ,W\rangle^2;$$

donde

$$JZ = \begin{pmatrix} 0 & iz_1 & \cdots & iz_n \\ i\bar{z}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\bar{z}_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que en este caso la curvatura no es constante, pero si que

$$\frac{1}{4} \leq K \leq 1.$$

También observamos que las curvaturas máximas ($K = 1$) se alcanzan cuando $W = JZ$, esto es, cuando $Z \wedge W$ es una linea compleja ($J^2 = -\mathbb{1}$ y por ende induce una estructura compleja en $T_{[\mathbb{1}]}\mathbb{CP}^n$); la curvatura mínima, $K = 1/4$, se realiza en aquellos planos contenidos en subespacios lagrangianos (i.e. aquellos tales que $\Pi \perp J\Pi$).

Esta métrica es de Einstein. Si e_1 es cualquier vector unitario, complétalo a una base ortonormal de la forma $e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n$ (tales bases siempre existen). Entonces

$$\begin{aligned} Ric(e_1) &= K(e_1 \wedge Je_1) + \sum_{j=2}^{n} (K(e_1 \wedge e_j) + K(e_1 \wedge Je_j)) \\ &= \frac{(2n-1)}{4} + \frac{3}{4}\langle Je_1, Je_1\rangle^2 + \sum_{j=2}^{n} (\langle Je_1, e_j\rangle^2 + \langle Je_1, Je_j\rangle^2) \\ &= \frac{(2n-1)}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Un teorema de Berger (ver [CE]) asegura que si una variedad simplemente conexa M es más redonda que $\mathbb{CP}^n$ (en el sentido de que la razón de la mínima a la máxima curvaturas sea estrictamente mayor a 1/4) entonces M es topológicamente una esfera.

3. La curvatura del espacio hiperbólico.

$\mathcal{H}^n \simeq SO^+_{n+1,1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$. Nuevamente podemos identificar el tangente al espacio homogéneo en la clase de la identidad con el subespacio

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

La similitud entre este espacio y el correspondiente para S^n presagian que el cálculo será muy parecido al de la esfera.

Tomemos nuevamente la métrica inducida por $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY, \quad X, Y \in \mathfrak{p}$. $\langle X, Y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ suponiendo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$.

De acuerdo con el Teorema 7.0.7, si $\{X, Y\}$ es un conjunto ortonormal, entonces la curvatura seccional del plano $X \wedge Y$ generado por ambos vale

$$K(X \wedge Y) = -\|[X, Y]\|^2 = -1.$$

El espacio hiperbólico es la variedad simplemente conexa (y completa) de curvatura constante -1.

4. La curvatura de $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$.

El tangente a $[\mathbb{1}]$ puede ser identificado, como ya es costumbre, con

$$\mathfrak{p} = \{A \mid A = A^t,\ \operatorname{Tr} A = 0\}.$$

Tomemos la métrica invariante inducida por la forma bilineal en $\mathfrak{sl}_3$ dada por $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$.

Si $\{X, Y\}$ es un conjunto ortonormal, entonces la curvatura seccional del plano $X \wedge Y$ generado por ambos vale $K(X \wedge Y) = -\|[X, Y]\|^2 \leq 0$.

En este caso existen planos de curvatura cero, e.g.:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

son ortonormales y conmutan, por lo tanto $K(X \wedge Y) = 0$. Sin embargo, si escogemos

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $K(X \wedge Z) = -4$.

5. Ejercicio. Calcula el mínimo de K. Determina, además, cuales son los planos en donde este mínimo se alcanza.

El plano generado por X y Y arriba no es otro que el subespacio $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{p}$ que consiste de matrices diagonales. Consideremos la subvariedad F obtenida al exponenciar $\mathfrak{d}$ y proyectar al cociente; i.e. $F = [\operatorname{Exp}(\mathfrak{d})]$.

6. Lema. *F es un "aplanado"; esto es, F es totalmente geodésico e isométrico a un espacio euclidiano.*

Una subvariedad S de (M, g) es totalmente geodésica si toda geodésica γ de M que es tangente a S en un punto está completamente contenida en S.

Demostración. Tomemos dos puntos

$$p_1 = \left[\begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1-y_1} \end{pmatrix}\right] \text{ y } p_2 = \left[\begin{pmatrix} e^{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_2-y_2} \end{pmatrix}\right] \text{ en } F.$$

La curva $\gamma(t) = \left[\begin{pmatrix} e^{x_1(1-t)+x_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{y_1(1-t)+y_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a} \end{pmatrix}\right]$, con $a = -(x_1(1-t) + x_2 t + y_1(1-t) + y_2 t)$, es la geodésica que satisface $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = p_2$. Por lo tanto, el cuadrado de la distancia entre p_1 y p_2 es igual a $\|\gamma'(0)\|^2$.

Un calculito nos da:

$$d^2(p_1, p_2) = \|\gamma'(0)\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2.$$

Consideremos el espacio euclidiano E determinado por $\mathbb{R}^2$ con el producto interior definido por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Definamos el difeomorfismo $\Psi : E \to F$, $\Psi(x, y) = \left[\begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{y} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x-y} \end{pmatrix}\right]$. El cuadrado de la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2.$$

Esto prueba que Ψ es una isometría. Si γ es una geodésica tangente a F en algún punto, entonces su derivada en ese punto es una matriz diagonal y por lo tanto $\gamma \subset F$, i.e. F es totalmente geodésica. $\square$

Trasladando F por la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ vemos que la variedad $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ posee una colección muy rica de subvariedades bidimensionales aplanadas. Esta estructura es la responsable de muchas de las propiedades de rigidez que posee este espacio.

7. El último ejemplo: una métrica homogénea en S^5 que no es de Einstein.

Consideremos el espacio homogéneo SU_3/SU_2. En 4.2.7 se ha probado que este espacio homogéneo es difeomorfo a S^5.

Dotemos a esta esfera con la métrica inducida por el producto interior $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$ en $\mathfrak{su}_3$.

Las álgebras y subespacios relevantes en este caso son:

$$\mathfrak{su}_3 = \{A \mid \bar{A}^t = -A,\ \operatorname{Tr} A = 0\},\ \ \mathfrak{su}_2 \simeq \mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ir & z \\ 0 & -\bar{z} & -ir \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \right\}$$

y

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{su}_2^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 2ir & z & w \\ -\bar{z} & -ir & 0 \\ -\bar{w} & 0 & -ir \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \right\}.$$

$\mathfrak{su}_3 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ es Ad_K-invariante.

Los siguientes vectores forman una base ortonormal de $\mathfrak{p}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Calculemos la curvatura del plano generado por X, Y. De acuerdo al Teorema 7.0.4 la fórmula para calcular esta curvatura es

$$K(X \wedge Y) = \frac{1}{4}\|[X, Y]_{\mathfrak{p}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{k}}\|^2.$$

Como

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$$

entonces $K(X \wedge Y) = \frac{1}{4}3 + 1 = \frac{7}{4}$. De la misma forma, $K(U \wedge V) = \frac{7}{4}$. Por otro lado, $K(X \wedge U) = K(X \wedge V) = K(Y \wedge U) = K(Y \wedge V) = 1$. Vemos entonces que esta métrica no es la redonda. Además, $K(Z \wedge X) = K(Z \wedge Y) = K(Z \wedge U) = K(Z \wedge V) = \frac{3}{4}$.

Finalmente,

$$\operatorname{Ric}(Z) = K(Z \wedge X) + K(Z \wedge Y) + K(Z \wedge U) + K(Z \wedge V) = 3$$

mientras que

$$\operatorname{Ric}(X) = K(X \wedge Z) + K(X \wedge Y) + K(X \wedge U) + K(X \wedge V) = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{2}.$$

S^5 con esta métrica no es de Einstein, a pesar de tener todo un SU_3 de isometrías (y un S^3 de isotropía actuando en la S^4 tangente).

7.2 Ejercicios

1. Calcula la curvatura seccional K^c en $S^2 \times S^1 \simeq U_2/U_1$ correspondiente a las distintas métricas $\langle\, ,\rangle^c$.

2. Calcula "a patín" la curvatura seccional del grupo de Heisenberg. Prueba que Ric toma valores tanto positivos como negativos.

3. Prueba que $SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ con la métrica simétrica $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} XY$ es una variedad de Einstein.

Reconocimientos y agradecimientos.

Deseamos agradecer muy sinceramente al árbitro por el detallado trabajo que hizo en la revisión de la primera versión de estas notas. Sus comentarios han sido valiosísimos y sin duda alguna han contribuido enormemente a mejorar la calidad de la exposición y a encontrar un nivel "más parejo". Deseamos también agradecer el apoyo recibido por parte de la SEP para poder contar con un gran número de estudiantes provenientes de todas partes de la República Mexicana en la IV edición de esta Escuela de Verano en Sistemas Dinámicos. Agradecemos también el apoyo recibido por parte del CONACyT al proyecto *Análisis geométrico: estructuras geométricas distinguidas* 0329PE.

Referencias

[**Ba**] Baas, N.A., *Sophus Lie*, The mathematical intelligencer vol16 (1994), 16-19.

[**Be**] Besse, A.., *Einstein Manifolds*, Springer Verlag, 1980.

[**Bo**] Boothby, W. M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

[**Bou**] Bourbaki, N., *Lie groups and Lie algebras (Vol. 2)*, Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1975.

[**CE**] Cheeger, J. Ebin, D., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.

[**Fa**] Faith, C., *Algebra I; rings, modules, and categories*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 190, Springer Verlag, New York, 1981.

[**GHL**] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer Verlag, 1987.

[**Ha**] Hawkins, Th., *The birth of Lie's theory of groups*, The mathematical intelligencer vol16 (1994), 6-17.

[**He**] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[**Hu**] Humphreys, J.E., *Introduction to Lie algebras and representations theory*, Springer Velrag, New York, 1972.

[**Ja**] Jacobson, N., *Basic algebra I*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.

[**Ke**] Kelley, J.L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.

[**KN**] Kobayashi, S. y Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*, Wiley, 1969.

[**Mi**] Milnor, J., *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, Virginia, 1965.

[**Sp**] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. V*, Publish or perish, Boston, 1975.

[**St1**] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Segunda Edición, Chelsea Pub. Co., New York, 1983.

[**St2**] Sternberg, S., *Group theory and physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.